١٤٢٩ هـ

شرح الباب الثاني
المتتابعات و المتسلسلات

إعداد الأستاذ /

طارق بن عامر آل سعدون الصيعري

نشر الشرح في منتديات رياضيات جدة
١٤٢٩هـ

الدرس الأول : المتتابعات Sequences

مقدمة :

تُستخدم كلمة المتتابعة ــ ويُطلق عليها أيضاً : (متتالية أو متوالية) ــ في حياتنا اليومية لتعني تتابع أشياء أو حوادث بنظام معين ، أما في الرياضيات فتعرف بأنها دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية و مجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية .

وتعد من المواضيع الأساسية التي اعتمدها الإنسان وطبقها في حياته التجارية بالإضافة إلى استخدامها في كثير من العلوم الأخرى .

تمهيد :

تعطي إحدى الشركات موظفيها زيادات سنوية حسب الجدول التالي :

في نهاية السنة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة	السادسة	......	الخامسة والعشرون
الزيادة بالريالات	٢٠	٤٠	٦٠	٨٠	١٠٠	؟	......	؟

لعلك لاحظت أنه على الرغم من أن الزيادة السنوية قليلة في البداية إلا أنها مشجعة مع الاستمرار في الخدمة مع الشركة ، كذلك لعلك لاحظت أن الزيادة تسير وفق قاعدة معينة ، حيث : الزيادة في

السنة الأولى = ٢٠ × ١ ، السنة الثانية = ٢٠ × ٢ ، السنة الثالثة = ٢٠ × ٣

السنة الرابعة = ٢٠ × ٤ ، السنة الخامسة = ٢٠ × ٥

ماهي هذي القاعدة حتى نستنتج الزيادة في بقية السنوات ؟

من الزيادات الواضحة في الجدول نلاحظ أن السنة السادسة = ٢٠ × ٦ = ١٢٠ .

ممكن أن نستنتج قانون الزيادة كالتالي :

الزيادة السنوية = ٢٠ × رتبة السنة الجديدة

نلاحظ من المثال السابق الآتي :

① أن الزيادة السنوية تمثل متتالية حدودها : (٢٠ ، ٤٠ ، ٦٠ ، ......)

② إذا كانت الشركة تنهي عمل موظفيها بعد خمسٍ وعشرين سنة فستكون المتتالية منتهية .

③ أن السنة تمثل رتبة الحد في هذي المتتالية والزيادة تمثل قيمة الحد .

نأخذ مثال آخر :

كرة سقطت من ارتفاع ٦٤ قدماً عن سطح الأرض وكانت ترتفع إلى ٧٥% من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض .

احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الرابع .

الحل :

بعد الاصطدام الأول يكون ارتفاع الكرة : ٦٤ × $\frac{٧٥}{١٠٠}$ = ٤٨ قدماً .

بعد الاصطدام الثاني يكون ارتفاع الكرة : ٤٨ × $\frac{٧٥}{١٠٠}$ = ٣٦ قدماً .

بعد الاصطدام الثالث يكون ارتفاع الكرة : ٣٦ × $\frac{٧٥}{١٠٠}$ = ٢٧ قدماً .

بعد الاصطدام الرابع يكون ارتفاع الكرة : ٢٧ × $\frac{٧٥}{١٠٠}$ = ٢٠.٥ قدماً .

نلاحظ من المثال :

① لاحظ تتابع الارتفاعات : (٦٤ ، ٤٨ ، ٣٦ ، ٢٧ ، ٢٠.٥)

الارتفاع الأول = $أ_{١}$ = ٦٤

الارتفاع الأول = $أ_{٢}$ = ٤٨

الارتفاع الأول = $أ_{٣}$ = ٣٦

الارتفاع الأول = $أ_{٤}$ = ٢٧

الارتفاع الأول = $أ_{٥}$ = ٢٠.٥

② أن رتبة الحد في المتتابعة أعداد طبيعية بينما قيمة الحد أعداد حقيقية كذلك كما في المثال السابق .

على ضوء هذين المثالين كيف نعرف المتتابعة وما هي عناصرها .

تعريف المتتابعة :

المتتابعة عبارة عن دالة مجالها ط أو مجموعة جزئية منها ، ومداها مجموعة جزئية من ح .

عناصر المدى تسمى بحدود المتتابعة .

وإذا كانت ن ∋ ط فإن د(ن) ، أو أ$_{ن}$ يسمى بالحد النوني للمتتابعة .

مثال نوضح به التعريف :

اعتبر متتابعة الأعداد : (٢ ، ٤ ، ٦ ، ....)

في هذه المتتابعة :

نسمي : ٢ الحد الأول ويرمز له بالرمز : أ$_{١}$

نسمي : ٤ الحد الثاني ويرمز له بالرمز : أ$_{٢}$

نسمي : ٦ الحد الثالث ويرمز له بالرمز : أ$_{٣}$

ويرمز إلى الحد النوني في هذي المتتابعة بالرمز : أ$_{ن}$

ماذا نعني بالحد العام للمتتابعة ؟

هو الحد الذي يمثل جميع الحدود في المتتابعة وعن طريقة نستنتج أي حد نريده .

كيف نستنتج الحد العام ؟

طبعاً استنتاج الحد العام ليس بالأمر السهل فيحتاج إلى مراس وصبر .

المتتابعة في الأعلى هي متتابعة الأعداد الزوجية والحد العام لها مشهور عند الجميع = ٢ ن ، ن ∋ ط

فعند : ن = ١ ⇐ الحد الأول = ٢ ، ن = ٢ ⇐ الحد الأول = ٤

ن = ٣ ⇐ الحد الأول = ٦ ، ن = ١٢ ⇐ الحد الأول = ٢٤ وهكذا

وسيأتي مزيد توضيح وأمثلة في استنتاج الحد العام .

كتابة المتتابعة :

(١) بأزواج مرتبة $\{ (١ ، ٱ_١) ، (٢ ، ٱ_٢) ، (٣ ، ٱ_٣) ، (٤ ، ٱ_٤) ...... \}$
أو $\{ (ن ، ٱ_ن) : ن \in ط \}$

(٢) بكتابة حدودها الأولى (بطريقة السرد) : $(ٱ_١ ، ٱ_٢ ، ٱ_٣ ، ٱ_٤ ، ......)$.

(٣) بكتابة حدها النوني بين قوسين هكذا : $\{ ٱ_ن \}_{ن=١}^{\infty}$

ونستخدم عادة الطريقتين الأخيرتين في دراستنا هذه .

ملاحظات :

(١) تكون المتتابعة منتهية إذا كان لها حد أخير مثل : (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩)
(٢) تكون المتتابعة غير منتهية إذا كان ليس لها حد أخير مثل :(٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)
(٣) ليس من الضروري اختلاف حدود المتتابعة مثل : (٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ....)
(٤) لايشترط وجود قاعدة للمتتابعة (قانون معين للحد العام) مثل : (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)
(٥) المراد بالحد النوني $\{ ٱ_ن \}$ للمتتابعة هو قانون فك المتتابعة إلى عناصرها .
(٦) يرمز للحد النوني بأحد الرموز التالية : $ٱ_ن$ ، $ب_ن$ ، $ح_ن$ ، وهكذا .
(٧) في الحد النوني $ٱ_ن$ ، يسمى ن : رتبة الحد ، فمثلاً : $ٱ_ن = (ٱ_١ ، ٱ_٢ ، ٱ_٣ ، ....)$

نسمي : $ٱ_١$: الحد الأول . ، $ٱ_٢$: الحد الثاني . ، $ٱ_٣$: الحد الثالث . وهكذا .

تعريف تساوي متتابعتين :

تكون المتتابعتان $\{أ_ن\}$ ، $\{ب_ن\}$ متساويتين إذا توفر الشرط التالي :

$أ_ن = ب_ن$ $\forall$ $ن \in ط$ ، أي أن : $أ_١ = ب_١$ ، $أ_٢ = ب_٢$ ، $أ_٣ = ب_٣$ ، ....

تمثيل المتتابعة بيانياً :

تمثل المتتابعة بيانياً في المستوى الديكارتي كمجموعة من النقط المنفصلة وتكون دائماً علـــى يمـــين المحور الصادي .

مثال :

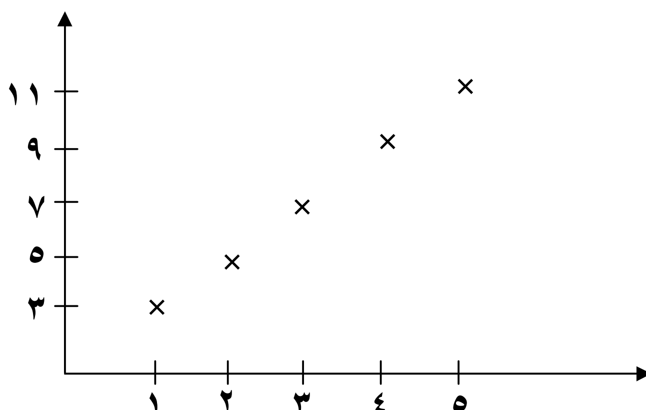
اكتب الحدود الخمسة الأولى من حدود المتتابعة ، ثم مثلها بيانياً في المستوى الإحداثي :

(أ) $\{أ_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ حيث : $أ_ن = ٢ن + ١$.

الحل :

(أ) $\{أ_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ = (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ......)

ن	١	٢	٣	٤	٥
$أ_ن$	٣	٥	٧	٩	١١
(ن ، $أ_ن$)	(١ ، ٣)	(٢ ، ٥)	(٣ ، ٧)	(٤ ، ٩)	(٥ ، ١١)



قاعدة إشارات حدود المتتابعة :

(أ) إذا كانت حدود المتتابعة تتغير بالصورة التالية : (+ ، − ، + ، − ، ......) البداية موجبة

فإن الحد النوني لهذا التغير هو : $أ_ن = (-١)^{ن+١}$ أو $أ_ن = (-١)^{ن-١}$ ، $ن \in ط$.

(٢) إذا كانت حدود المتتابعة تتغير بالصورة التالية : (− ، + ، − ، + ، .....) البداية سالبة

فإن الحد النوني لهذا التغير هو : $أ_ن = (-١)^{ن}$.

أمثلة على الدرس :

مثال (١) :

فُك المتتابعة التالية : $\{(-١)^{ن} \times ن\}_{ن=١}^{\infty}$

واضح أن : $أ_١ = (-١)^{١} \times ١ = -١$ ، $أ_٢ = (-١)^{٢} \times ٢ = ٢$ ، $أ_٣ = (-١)^{٣} \times ٣ = -٣$ ، ....

$\Leftarrow \{أ_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ = (−١ ، ٢ ، −٣ ، ٤ ، −٥ ، ....)

مثال (٢) :

(٢) استنتج الحد النوني للمتتابعة التالية : $(\frac{١}{٣} ، -\frac{١}{٩} ، \frac{١}{٢٧} ، -\frac{١}{٨١} ، ....)$.

المتتابعة غير منتهية و إشارتها تتعاقب ابتدءاً بالموجب وأيضاً التغيير في المقام حيث :

$أ_١ = \frac{+١}{٣} = (-١)^{١+١} \times (\frac{١}{٣})$ ، $أ_٢ = (-١)^{٢+١} \times (\frac{١}{٣})^{٢}$ ،

$أ_٣ = (-١)^{٣+١} \times (\frac{١}{٣})^{٣}$ ، ......

$\Leftarrow \{أ_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ حيث : $أ_ن = (-١)^{ن+١} \times (\frac{١}{٣})^{ن}$.

مثال (٣) : استنتج الحد النوني لكل متتابعة مما يلي :

(أ) (١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ....)

(ب) (٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ....)

(ج) (٤ ، ٧ ، ١٢ ، ١٩ ، ....)

الحل :

(أ) واضح من المتتابعة أنها غير منتهية وأن : $أ_١ = \frac{١}{١}$ ، $أ_٢ = \frac{١}{٢}$ ، $أ_٣ = \frac{١}{٣}$ ، .... ، $أ_ن = \frac{١}{ن}$

$\Leftarrow \{أ_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ حيث $أ_ن = \frac{١}{ن}$ ، ن ∈ ط .

(ب) واضح من المتتابعة أنها غير منتهية وأن :

$أ_١ = ٨ = ٣ \times ١ + ٥$ ، $أ_٢ = ١١ = ٣ \times ٢ + ٥$ ، $أ_٣ = ١٤ = ٣ \times ٣ + ٥$ ، ....

$أ_ن = ٣ \times ن + ٥$

$\Leftarrow \{أ_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ ، حيث $أ_ن = ٣ \times ن + ٥$ ، ن ∈ ط .

(ج) واضح من المتتابعة أنها غير منتهية وأن :

$أ_١ = ٤ = ١^٢ + ٣$ ، $أ_٢ = ٧ = ٢^٢ + ٣$ ،

$أ_٣ = ١٢ = ٣^٢ + ٣$ ، ..... ، $أ_ن = ن^٢ + ٣$

$\Leftarrow \{أ_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ حيث : $أ_ن = ن^٢ + ٣$.

وأكرر أن استنتاج الحد النوني بالذات للمتتابعات غير المشهورة ليس بالأمر السهل ولكن بكثرة حل المسائل يستطيع الطالب امتلاك هذه المهارة .

تمارين على الدرس :

1 استنتج الحد النوني لكل متتابعة مما يلي ، ثم أوجد الحد العاشر :

① (١ ، ٢ ، ٦ ، ٢٤ ، ١٢٠ ، ....)

② (١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ....)

③ (٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥ ، ....)

④ ($\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، $-\frac{١}{٢}$ ، -١ ، ....)

⑤ (٢ ، $(\frac{٣}{٢})^{٢}$ ، $(\frac{٤}{٣})^{٣}$ ، $(\frac{٥}{٤})^{٤}$ ، ....)

2 اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعات :

① $أ_ن = \frac{ن}{ن + ١}$

② $أ_ن = \frac{(-١)^ن}{(٢)^ن}$

3 أوجد : $أ_٣$ ، $أ_٤$ ، $أ_٥$ حيث : $أ_١ = ١$ ، $أ_٢ = ١$ وكان :

$أ_ن = أ_{ن-١} + أ_{ن-٢}$

حل تمارين على الدرس :

١ استنتج الحد النوني لكل متتابعة مما يلي ، ثم أوجد الحد العاشر :

① (١ ، ٢ ، ٦ ، ٢٤ ، ١٢٠ ، ....)

② (١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ....)

③ (٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥ ، ....)

④ ($\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، $-\frac{١}{٢}$ ، −١ ، ....)

⑤ (٢ ، $(\frac{٣}{٢})^{٢}$ ، $(\frac{٤}{٣})^{٣}$ ، $(\frac{٥}{٤})^{٤}$ ، ....)

الحل :

① (١ ، ٢ ، ٦ ، ٢٤ ، ١٢٠ ، ....)

واضح أن :

$أ_{١} = ١ \times ١ = ١!$ ، $أ_{٢} = ١ \times ٢ = ٢!$ ، $أ_{٣} = ١ \times ٢ \times ٣ = ٣!$

$أ_{٤} = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ = ٤!$ ، $أ_{٥} = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ = ٥!$

∴ الحد النوني = $أ_{ن} = ن!$

② (١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ....)

واضح أن :

هذي المتتابعة من المتتابعات المشهورة وهي متتابعة الأعداد المثلثية و الحد النوني :

$$أ_{ن} = \frac{١}{٢}(ن^{٢} + ن)$$

③ (٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥ ، ....)

واضح أن :

$أ_{١} = ٠ = ١ \times ١ - ١$ ، $أ_{٢} = ٣ = ٢ \times ٢ - ١$

$أ_{٣} = ٨ = ٣ \times ٣ - ١$ ، $أ_{٤} = ١٥ = ٤ \times ٤ - ١$

∴ الحد النوني = $أ_{ن} = ن^{٢} - ١$

④ ($\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، $-\frac{١}{٢}$ ، -١ ، ....)

واضح أن :

$أ_{١} = ٠ = ١ - \frac{١}{٢} \times ١$ ، $أ_{٢} = ٠ = ١ - \frac{١}{٢} \times ٢$

$أ_{٣} = -\frac{١}{٢} = ١ - \frac{١}{٢} \times ٣$ ، $أ_{٤} = -١ = ١ - \frac{١}{٢} \times$
٤

∴ الحد النوني = $أ_{ن} = ١ - \frac{١}{٢} ن$

وأكرر مرة أخرى أن استنتاج الحد النوني بالذات للمتتابعات غير المشهورة ليس بالأمر السهل ولكن بكثرة حل المسائل يستطيع الطالب امتلاك هذه المهارة .

٢ اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعات :

① $\text{أ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{ن} + 1}$ ② $\text{أ}_{\text{ن}} = \dfrac{(-1)^{\text{ن}}}{(2)^{\text{ن}}}$

الحل :

① $\text{أ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{ن} + 1}$

$\text{أ}_1 = \frac{1}{2}$ ، $\text{أ}_2 = \frac{2}{3}$ ، $\text{أ}_3 = \frac{3}{4}$ ، $\text{أ}_4 = \frac{4}{5}$ ، $\text{أ}_5 = \frac{5}{6}$

② $\text{أ}_{\text{ن}} = \dfrac{(-1)^{\text{ن}}}{(2)^{\text{ن}}}$

$\text{أ}_1 = -\frac{1}{2}$ ، $\text{أ}_2 = \frac{1}{4}$ ، $\text{أ}_3 = -\frac{1}{8}$ ، $\text{أ}_4 = \frac{1}{16}$ ، $\text{أ}_5 = -\frac{1}{32}$

٣ أوجد : أ_3 ، أ_4 ، أ_5 حيث : $\text{أ}_1 = 1$ ، $\text{أ}_2 = 1$ وكان :

$\text{أ}_{\text{ن}} = \text{أ}_{\text{ن}-1} + \text{أ}_{\text{ن}-2}$

الحل :

$\because \text{أ}_{\text{ن}} = \text{أ}_{\text{ن}-1} + \text{أ}_{\text{ن}-2}$

$\therefore \text{أ}_3 = \text{أ}_{3-1} + \text{أ}_{3-2} = \text{أ}_2 + \text{أ}_1 = 1 + 1 = 2 \Leftarrow \text{أ}_3 = 2$

$\text{أ}_4 = \text{أ}_{4-1} + \text{أ}_{4-2} = \text{أ}_3 + \text{أ}_2 = 2 + 1 = 3 \Leftarrow \text{أ}_4 = 3$

$\text{أ}_5 = \text{أ}_{5-1} + \text{أ}_{5-2} = \text{أ}_4 + \text{أ}_3 = 3 + 2 = 5 \Leftarrow \text{أ}_4 = 5$

وهذه المتتالية تدعى متتالية فيبوناتشي (**Fibonacci Sequence**)

وقاعدتها أي حد = حاصل جمع الحدين السابقين له

الدرس الثاني : المتتابعات الحسابية (Arithmetic Sequence)

تمهيد :

يبين الجدول التالي المسافة بالأمتار التي يقطعها جسم يسير في مسار أفقي في أزمنة مختلفة معطـــاة بالثواني :

الزمن بالثواني	١	٢	٣	٤	٥	٦	……
المسافة بالأمتار	١٦	٤٨	٨٠	١١٢	١٤٤	١٧٦	……

نلاحظ أن المسافات : (١٦ ، ٤٨ ، ٨٠ ، ١١٢ ، ١٤٤ ، ١٧٦ ، ….) تشكل متتالية ،

وإذا لاحظت الفرق بين كل حد والحد السابق تجده قيمة ثابتة = ٣٢ ، حيث :

٤٨ – ١٦ = ٨٠ – ٤٨ = ١١٢ – ٨٠ = ١٤٤ – ١١٢ = ١٧٦ – ١٤٤ = ٣٢

فمثل هذه المتتابعات التي يزيد فيها كل حد عن الحد السابق بمقدار ثابت تسمى متتابعة حسابية .

مثال آخر :

لاحظ المتتابعة التالية : (٣٣ ، ٢٩ ، ٢٥ ، ٢١ ، …….)

سنجد أن كل حد ينقص عن سابقة بمقدار = – ٤ ، حيث :

٢٩ – ٣٣ = ٢٥ – ٢٩ = ٢١ – ٢٥ = – ٤

كذلك مثل هذه المتتابعات التي ينقص فيها كل حد عن الحد السابق بمقدار ثابت تسمى: متتابعة حسابية .

الآن ماهو تعريف المتتابعة الحسابية ؟

تعريف المتتابعة الحسابية:

المتتابعة $\{ح_{ن}\}$ المنتهية أو الغير منتهية تسمى متتابعة حسابية إذا وجد عدداً ثابتاً ء بحيث :

ء = الحد اللاحق – الحد السابق .

بعبارة رياضية :

$ء = ح_{ن+١} - ح_{ن}$ ، لجميع قيم ن .

ونسمي الفرق الثابت ء بأساس المتتابعة الحسابية .

الحد النوني (الحد العام) للمتتابعة الحسابية :

وهو يُكتب على الصورة : $ح_{ن} = ٢ + (ن - ١) \times ء$ ، حيث :

٢ : الحد الأول . ن : رتبة الحد (أي موقع الحد في المتتابعة) .

ء : الأساس . $ح_{ن}$: الحد الأخير ، أو الحد العام.

فمثلا :

في المتتابعة الحسابية : (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ....)

الحد الأول = ٢ = ٥ ، الأساس = ء = ٩ – ٥ = ٤

الحد العام = $ح_{ن}$ = ٢ + (ن – ١) × ء

= ٥ + (ن – ١) × ٤

= ٥ + ٤ ن – ٤

∴ $ح_{ن}$ = ٤ ن + ١

ملاحظات :

(١) إذا كان ء > صفر ، فإن قيم الحدود تتزايد .

(٢) إذا كان ء < صفر ، فإن قيم الحدود تتناقص .

(٣) إذا كان ء = صفر ، فإن قيمة أي حد تساوي قيمة الحد الأول .

(٤) $ح_ن$: دالة من الدرجة الأولى في ن .

(٥) ن يرمز (لعدد الحدود) أو (لرتبة الحد) أو (رتبة الحد الأخير إذا كان مجهولاً) ويمكن استخدام .

تذكر أن :

لإيجاد أي حد من حدود المتتابعة الحسابية لابد من إيجاد قيم : أ ، ن ، ء .

ملاحظة مهمة :

إذا عُرف في المتتابعة الحد الأول : أ ، و الأساس : ء ، فإننا نستطيع الحصول على جميع حدود المتتابعة وذلك بإضافة ء إلى الحد السابق فنحصل على الحد اللاحق وهكذا فنحصل على جميع حدود المتتابعة .

مثال : أوجد المتتابعة الحسابية إذا كان حدها الأول = ٧ ، وأساسها = − ٢ .

الحل :

معطى : أ = ٧ ، ء = − ٢

من الملاحظة في الأعلى نجد أن :

∴ $ح_١$ = ٧ ، $ح_٢$ = ٧ + (−٢) = ٥ ، $ح_٣$ = ٥ + (−٢) = ٣

∴ المتتابعة هي : (٧ ، ٥ ، ٣ ، ١ ، − ١ ، ....) .

طبعاً إذا كانت المتتابعة غير منتهية نكتفي بكتابة حدودها الأولى .

تمارين على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

١ بيِّن أي من المتتابعات التالية حسابية :

① (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ....)

② (٣ ، ٠ ، −٣ ، −٦ ، −٩ ، ....)

③ (٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٣ ، ١٤ ، ....)

٢ في المتتابعة الحسابية : (٣٤ ، ٣٧ ، ٤٠ ، ....)

أوجد : الأساس ، الحد العام .

٣ في المتتابعة : $\{ح_{ن}\}$ ، حيث : $ح_{ن} = ٧ن − ١$ ، أثبت أنها حسابية .

٤ أوجد $ح_{١٥}$ من المتتابعة الحسابية (٨٧ ، ٨٠ ، ٧٣ ، ٦٦ ، ....) ثم اكتب الحد النوني للمتتابعة .

حل تمارين على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

١ بيِّن أي من المتتابعات التالية حسابية :

① (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ....)

② (٣ ، ٠ ، –٣ ، –٦ ، –٩ ، ....)

③ (٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٣ ، ١٤ ، ....)

الحل :

① (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ....)

كما قلنا سابقاَ في الشرح أن قاعدة المتتابعة الحسابية هي :

الحد اللاحق – الحد السابق = مقدار ثابت ، لجميع قيم المتتابعة

٩ – ٥ = ١٣ – ٩ = ١٧ – ١٣ = ٢١ – ١٧ = ٤ ⇐ ء = ٤

⇐ المتتابعة حسابية .

② (٣ ، ٠ ، –٣ ، –٦ ، –٩ ، ....)

٠ – ٣ = –٣ – ٠ = –٦ – (–٣) = –٩ – (–٦) = – ٣ ⇐ ء = –٣

⇐ المتتابعة حسابية .

③ (٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٣ ، ١٤ ، ....)

٥ – ٢ = ٣
٧ – ٥ = ٢
∵ الفرق اختلف ⇐ المتتابعة ليست حسابية

٢ في المتتابعة الحسابية : (٣٤ ، ٣٧ ، ٤٠ ، ....)

أوجد : الأساس ، الحد العام .

الحل :

ذكرنا في الدرس أن الأساس للمتتابعة الحسابية : ء = الحد اللاحق – الحد السابق .

∴ ء = ٣٧ – ٣٤ = ٣

الحد العام : $ح_ن$ = ٩ + (ن – ١) × ء ، حيث :

٩ : الحد الأول = ٣٤   ء : الأساس = ٣

⇐ $ح_ن$ = ٣٤ + (ن – ١) × ٣

= ٣٤ + ٣ ن – ٣

= ٣ ن + ٣١

⇐ $ح_ن$ = ٣ ن + ٣١

التأكد من الحل :

الحد الأول عندما : ن = ١ ⇐ $ح_١$ = ٣ × ١ + ٣١ = ٣٤

الحد الثاني عندما : ن = ٢ ⇐ $ح_٢$ = ٣ × ٢ + ٣١ = ٣٧

الحد الثالث عندما : ن = ٣ ⇐ $ح_٣$ = ٣ × ٣ + ٣١ = ٤٠

حل تمارين على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

٣ في المتتابعة : $\{ ح_{ن} \}$ ، حيث : $ح_{ن} = ٧ن - ١$ ، أثبت أنها حسابية .

الحل :

لاننسى أن : تكون المتتابعة حسابية إذا كان الفرق بين الحد اللاحق والسابق = مقدار ثابت .

$\because ح_{ن} = ٧ن - ١$

$\Leftarrow ح_{ن+١} = ٧ \times (ن + ١) - ١ \Leftarrow ح_{ن+١} = ٧ن + ٧ - ١$

$\Leftarrow ح_{ن+١} = ٧ن + ٦$

الآن : $ح_{ن+١} - ح_{ن} = ٧ن + ٦ - (٧ن - ١)$

$= ٧ن + ٦ - ٧ن + ١$

$= ٧$

= مقدار ثابت

$\Leftarrow$ المتتابعة حسابية

هذا الحل لأنه طلب أن نثبت أنها حسابية ، وللتأكد بإمكاننا فك بعض حدود المتتابعة وسنلاحظ أن الفرق بين كل حدين متجاورين : (اللاحق − السابق = مقدار ثابت = ٧)

فائدة :

ذكرنا في الملاحظات أن المتتابعة الحسابية هي دالة من الدرجة الأولى في المجهول ن والآن سنزيد الفائدة أن معامل ن هو أساس المتتابعة وهو نفسه المقدار الثابت .

٤ أوجد $ح_{١٥}$ من المتتابعة الحسابية (٨٧ ، ٨٠ ، ٧٣ ، ٦٦ ، ....) ثم اكتب الحد النوني للمتتابعة .

الحل :

ذكرنا في الملاحظات : لإيجاد أي حد من حدود المتتابعة الحسابية لابد من إيجاد قيم : ٢ ، ن ، ى .

كذلك لاتنسى أن : $ح_{١٥}$ = الحد الخامس عشر

∵ المتتابعة حسابية ⇐ ى = ٨٠ − ٨٧ = − ٧

٢ = الحد الأول = ٨٧ ، ن = رتبة الحد المطلوب = ١٥

وطبعاً لإيجاد أي حد في المتتابعة الحسابية نعوض في الحد العام :

$ح_{ن}$ = ٢ + (ن − ١) × ى

⇐ $ح_{١٥}$ = ٨٧ + (١٥ − ١) × − ٧

= ٨٧ + ١٤ × − ٧

= ٨٧ + (− ٩٨)

= ٨٧ − ٩٨

= − ١١

∴ $ح_{١٥}$ = − ١١

والحد النوني = $ح_{ن}$ = ٢ + (ن − ١) × ى

⇐ $ح_{ن}$ = ٨٧ + (ن − ١) × − ٧ = ٨٧ − ٧ن + ٧

⇐ $ح_{ن}$ = ٩٤ − ٧ن

أمثلة إضافية على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

مثال : إذا كان ٧ أحد حدود المتتابعة (٤٣ ، ٣٩ ، ٣٥ ، ....) فما ترتيب هذا الحد وما هو أول حد سالب في هذه المتتابعة .

الحل :

في هذا المثال مطلوبان هما :

- رتبة الحد الذي قيمته ٧ .
- أول حد إشارته سالبة في المتتابعة .

أولاً :

∵ المطلوب رتبة الحد ⇐ المجهول المطلوب هو : ن

طبعاً نعوض في الحد العام : $ح_{ن}$ = أ + (ن − ١) × ء ، حيث :

أ = ٤٣ ، ء = − ٤ ، $ح_{ن}$ = ٧ ، ن = ؟

الآن : نعوض عن القيم المعطاة :

٧ = ٤٣ + (ن − ١) × − ٤

٧ = ٤٣ − ٤ ن + ٤

٧ = ٤٧ − ٤ ن

⇐ ٤ ن = ٤٠ (نقلنا للطرف الآخر مع تغيير الإشارة)

⇐ ن = ١٠

∴ الحد الذي قيمته ٧ هو الحد العاشر .

ثانياً :

لإيجاد أول حد سالب نتبع التالي :

∵ $ح_{١٠}$ = ٧

⇐ $ح_{١١}$ = ٧ + (− ٤) = ٣

⇐ $ح_{١٢}$ = ٣ + (− ٤) = − ١

∴ أول حد سالب هو الحد الثاني عشر .

ملاحظة : توجد طريقة أخرى لاستنتاج الحد السالب سنأخذها في مثال لاحق .

أمثلة إضافية على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

مثال : متتابعة حسابية $ح_٦ = ٤٥$ ، $ح_{١٥} = ٩٩$ ، اكتب $ح_{٢٠}$ ، ثم اكتب المتتابعة .

الحل : طريقة أولى للحل :

نعوض في الحد العام بقيم الحدين : $ح_٦$ ، $ح_{١٥}$ نجد أن :

$ح_٦ = ﺃ + ٥ ء = ٤٥$ .... (١)

$ح_{١٥} = ﺃ + ١٤ ء = ٩٩$ .... (٢)

بطرح (٢) − (١) ينتج :

$٩ ء = ٥٤ \Leftarrow ء = ٦$.

بالتعويض في إحدى المعادلتين : (١) أو (٢) نجد أن : $ﺃ = ١٥$.

$\because$ المطلوب $ح_{٢٠} \Leftarrow ن = ٢٠$.

$\therefore ح_{٢٠} = ١٥ + ١٩ \times ٦$

$= ١٥ + ١١٤$

$= ١٢٩$

طريقة ثانية للحل باستخدام القاعدة التالية :

> قانون لاستنتاج أساس المتتابعة الحسابية إذا عُلم حدان فيها :
>
> إذا كان : $ح_م$ ، $ح_هـ$ حدين في المتتابعة الحسابية $(ح_ن)$ ، فإن : $ء = \frac{ح_م - ح_هـ}{م - هـ}$

الحل :

$\because ء = \frac{ح_م - ح_هـ}{م - هـ} \Leftarrow ء = \frac{ح_{١٥} - ح_٦}{١٥ - ٦} = \frac{٩٩ - ٤٥}{١٥ - ٦}$

$\Leftarrow ء = \frac{٥٤}{٩} = ٦$.

$\because ح_٦ = (ﺃ + (ن - ١) \times ء) \Leftarrow ٤٥ = ﺃ + ٣٠ \Leftarrow ﺃ = ١٥$.

ثم نوجد الحد العشرين كما في الطريقة الأولى .

ملاحظة : عند استخدام القاعدة في الأعلى لاستنتاج الأساس ننتبه إلى أننا إذا بدأنا بالحد $ح_م$ في المقام نبدأ بالرتبة م .

أمثلة إضافية على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

مثال : قفز رجل مظلي من فوق طائرة بشكل ر أسي نحو الأرض فإذا قطع مسافة ١٦ قدماً في الثانية الأولى وإذا كانت مسافة النزول تزيد بمعدل ٣٢ قدماً كل ثانية فما هي المسافة التي ينزلها المظلي بعد ٢٠ ثانية .

الحل :

في الثانية الأولى قطع ١٦ قدماً وكذلك تزيد مسافة النزول بمعدل ٣٢ قدماً لكل ثانية

⇐ في الثانية الثانية يقطع : ٤٨ قدماً

في الثانية الثالثة يقطع : ٨٠ قدماً

في الثانية الرابعة يقطع : ١١٢ قدماً ، وهكذا :

نستنتج أن نزول المظلي يمثل متتابعة حسابية حدها الأول = ١٦ ، وأساسها = ٣٢

المطلوب المسافة التي يقطعها المظلي بعد عشرين ثانية .

أي بصورة رياضية المطلوب : $ح_{٢٠}$ من المتتابعة الحسابية .

⇐ $ح_{ن} = أ + (ن - ١) \times د$

⇐ $ح_{٢٠} = ١٦ + (٢٠ - ١) \times ٣٢$

$= ١٦ + ١٩ \times ٣٢$

$= ١٦ + ٦٠٨$

$\therefore ح_{٢٠} = ٦٢٤$

⇐ المسافة التي يقطعها المظلي بعد عشرين ثانية تساوي : ٦٢٤ قدماً .

تمارين إضافية على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

١ إذا كان الحد الخامس من متتابعة حسابية يساوي ٩ والحد الثامن يساوي ١٥ أوجد المتتابعة .

٢ أوجد رتبة الحد الذي قيمته : ٩٩ من المتتابعة الحسابية : (٧ ، ٩ ، ١١ ، ....)

٣ متتابعة حسابية حدها الثامن ينقص عن حدها الثالث بمقدار ٢٠ والحد الثالث ضعف الثامن ، فأوجد الحد الثاني عشر فيها .

٤ متتابعة حسابية فيها : $ح_{٥} = ١٤$ ، $ح_{٨} = ٢٠$ ، أوجد المتتابعة .

٥ متتابعة حسابية مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها = ٣٦ ، ومجموع الحدين الخامس والسادس = ٦٦ أوجد المتتابعة .

٦ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية : (− ١٠ ، − ٧ ، − ٤ ، .... ، ٥٠) .

٧ أوجد الحد الذي رتبته ٣٠٠ في المتتابعة الحسابية التي حدها السادس = ٨ ، وحدها التاسع = ٤١ .

٨ شخص يزن ١٣٠ كجم يريد إنقاص وزنه بمعدل كيلوجرامين كل شهر عن طريق نظام غذائي . بعد كم شهر سيكون وزنه ٨٠ كيلوجراماً إذا استمر بالمعدل نفسه ؟

٩ اثبت أن : (لو أ ، لو أب ، لو أب^{٢} ، لو أب^{٣} ، ....) تمثل متتالية حسابية . ثم أوجد الحد السابع .

١٠ خزان يحتوي على ٦٢٥ متراً مكعباً من الماء وينقص في كل يوم بمعدل ٢٥ متراً مكعباً عن اليوم الذي قبله ، جد بعد كم يوم :

(أ) يبقى في الخزان ٢٧٥ متراً مكعباً من الماء .   (ب) ينفذ الماء كلياً من الخزان .

تمارين إضافية على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

٩ اثبت أن : (لو ٢ ، لو ٢ب ، لو ٢ب^{٢} ، لو ٢ب^{٣} ، ....) تمثل متتالية حسابية .
ثم أوجد الحد السابع .

الحل :

من خواص اللوغاريتمات :

① لو $\frac{٢}{ب}$ = لو ٢ − لو ب   ② لو ٢ × ب = لو ٢ + لو ب
③ ٢ × لو ب = لو ب^{٢}

تكون المتتابعة حسابية إذا كان الفرق بين الحد اللاحق والسابق = مقداراً ثابتاً دائماً .

الآن :

لو ٢ب − لو ٢ = لو $\frac{٢ب}{٢}$ = لو ب
لو ٢ب^{٢} − لو ٢ب = لو $\frac{٢ب^{٢}}{٢ب}$ = لو ب
لو ٢ب^{٣} − لو ٢ب^{٢} = لو $\frac{٢ب^{٣}}{٢ب^{٢}}$ = لو ب

واضح جداً أن المتتابعة حسابية لأن الفرق دائماً ثابت = لو ب

الآن نوجد الحد السابع :

$ح_{ن}$ = ٢ + (ن − ١) × ء   (٢ = لو ٢ ، ء = لو ب ، ن = ٧)

⇐ $ح_{٧}$ = لو ٢ + ٦ × لو ب
= لو ٢ + لو ب^{٦} (من خواص لوعاريتمات)
= لو ٢ ب^{٦} (من خواص اللوعاريتمات)

الدرس الثالث : الأوساط الحسابية :

تعريف الأوساط الحسابية :

الأوساط الحسابية بين العددين ﺃ و ب هي عبارة عن حدود المتتابعة الحسابية التي حدها الأول ﺃ و حـــدها الأخير ب وعُرف عدد حدودها مسبقاً .

تذكر أن :

(١) عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢ .

(٢) لإيجاد قيمة ء في حالة الأوساط الحسابية نستخدم القانون : $ء = \frac{ب - ﺃ}{ن - ١}$

حيث : ﺃ : الحد الأول ، ب : الحد الأخير ، ن : عدد الحدود ، ء : الأساس .

حالة خاصة :

إذا كان المطلوب وسطاً حسابياً واحداً فقط فإن :

الوسط الحسابي = $\frac{ﺃ + ب}{٢}$

مثال :

أوجد الخمسة الأوساط الحسابية بين العددين : – ١٢ ، ١١٤ .

الحل :

واضح أن : ﺃ = –١٢ ، ب = ١١٤ ، ن = ٧ .

-١٢ ، ☐ ، ☐ ، ☐ ، ☐ ، ☐ ، ١١٤

⇐ $ء = \frac{ب - ﺃ}{ن - ١} = \frac{١١٤ + ١٢}{٦} = \frac{١٢٦}{٦} = ٢١$.

طبعاً : نحصل على المتتابعة الحسابية بإضافة الأساس إلى الحد السابق فنحصل على الحد اللاحق .

∴ الأوساط الحسابية هي : ٩ ، ٣٠ ، ٥١ ، ٧٢ ، ٩٣

الأوساط الحسابية :

مثال : أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين : ٢٣ ، − ٩

الحل :

واضح أن : ء = ٢٣ ، ب = − ٩ ، ن = ٥ .

٢٣	،		،		،		،	−٩

$$\Leftarrow \text{ء} = \frac{\text{ب} - \text{ء}}{\text{ن} - ١} = \frac{-٩ - ٢٣}{٥ - ١} = -\frac{٣٢}{٤} = -٨ .$$

وأيضاً لا تنسى : نحصل على المتتابعة الحسابية بإضافة الأساس إلى الحد السابق فنحصل على الحد اللاحق .

والمتتابعة الناشئة هي : (٢٣ ، ١٥ ، ٧ ، −١ ، −٩)

∴ الأوساط الحسابية هي : ١٥ ، ٧ ، −١

مثال :

إذا كان الوسط الحسابي بين عددين هو ١٠ و الوسط الحسابي بين مربعيهما هو ١٤٩ فماهما العددان ؟

الحل :

نفرض العددين : س ، ص .

من الحالة الخاصة للوسط الحسابي نجد أن : $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢} = ١٠ \Leftarrow \text{س} + \text{ص} = ٢٠$ ...... ①

الآن :

الوسط الحسابي بين مربعيهما هو ١٤٩ ⇐ $\frac{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}{٢} = ١٤٩ \Leftarrow \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٢٩٨$ ..... ②

من ① نجد أن : ص = ٢٠ − س ∴ بتعويض قيمة ص في② نجد أن :

$\text{س}^٢ + (٢٠ - \text{س})^٢ = ٢٩٨$

$\Leftarrow \text{س}^٢ + ٤٠٠ - ٤٠\text{س} + \text{س}^٢ - ٢٩٨ = ٠$

$\Leftarrow ٢\text{س}^٢ - ٤٠\text{س} + ١٠٢ = ٠$

معادلة من الدرجة الثانية هناك أكثر من طريقة لحلها : (القانون العام ــ التحليل ــ طريقة المقص)

سنجد أن العددين هما : ٣ ، ١٧ .

تمارين على المتتابعات و الأوساط الحسابية :

١ أدخل خمسة أوساط حسابية بين العددين : ٢٣ ، ٦٥ .

٢ أوجد الحدود الناقصة من المتتابعة الحسابية : (٥ ،......،......،......،......، ٣٥)

٣ إذا كان : (٩ ، ٢٤ ، ب ، ٣٢ ، جـ) تكون متتابعة حسابية أوجد قيم : ٩ ، ب ، جـ .

٤ إذا كان : س ، ص وسطين حسابيين بين : ٩ ، ب أثبت أن :
٩ − ب = ٣ (س − ص) .

٥ أوجد الحدود الناقصة لكي يكون الناتج حدوداً لمتتابعة حسابية :

(٩) (٥ ، □ ، ٢١ ، □)

(ب) (□ ، ٢٦ ، □ ، □ ، ٤٤)

حل تمارين على المتتابعات و الأوساط الحسابية :

١ أدخل خمسة أوساط حسابية بين العددين : ٢٣ ، ٦٥ .

الحل :

واضح أن : أ = ٢٣ ، ب = ٦٥ ، ن = ٧ .

$$\Leftarrow \text{ء} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن} - ١} = \frac{٦٥ - ٢٣}{٧ - ١} = \frac{٤٢}{٦} = ٧ .$$

∴ الأوساط الحسابية هي : ٣٠ ، ٣٧ ، ٤٤ ، ٥١ ، ٥٨

٢ أوجد الحدود الناقصة من المتتابعة الحسابية : (٥ ،......،......،......،...... ، ٣٥)

الحل :

الحدود الناقصة تكون متتابعة حسابية حدها الأول = ٥ ، والأخير = ٣٥

والحدود الناقصة مع الحدين تكون متتابعة حسابية فيها :

أ = ٥ ، ب = ٣٥ ، ن = ٦ .

نعوض في القانون : $\text{ء} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن} - ١}$ سنجد أن ء = ٦ .

∴ الحدود الناقصة : ١١ ، ١٧ ، ٢٣ ، ٢٩

حل تمارين على المتتابعات و الأوساط الحسابية :

٣ إذا كان : (٢ ، ٢٤ ، ب ، ٣٢ ، جـ) تكون متتابعة حسابية أوجد قيم : ٢ ، ب ، جـ .

الحل :

∵ ب وسط بين ٢٤ و ٣٢ ⇐ ب = $\frac{٢٤+٣٢}{٢}$ = $\frac{٥٦}{٢}$ = ٢٨

∴ ب = ٢٨

∵ المتتابعة حسابية ⇐ ء = ٤

∴ ٢ = ٢٠ ، جـ = ٣٦ .

٤ إذا كان : س ، ص وسطين حسابيين بين : ٢ ، ب أثبت أن :

٢ − ب = ٣ (س − ص) .

الحل :

∵ س ، ص وسطين بين ٢ ، ب

∴ ستكون المتتابعة الحسابية على الصورة : (٢ ، س ، ص ، ب)

⇐ ء = ص − س .... (١)

من العلاقة : ء = $\frac{ب - ٢}{ن - ١}$

⇐ ء = $\frac{ب - ٢}{٤ - ١}$ ⇐ ٣ ء = ب − ٢ .... (٢)

بالتعويض بقيمة ء من : (١) في (٢) نجد أن :

٣ (ص − س) = ب − ٢

⇐ − ٣ (ص − س) = ٢ − ب (بضرب الطرفين في : − ١)

⇐ ٣ (س − ص) = ٢ − ب

حل تمارين على المتتابعات و الأوساط الحسابية :

٥ أوجد الحدود الناقصة لكي يكون الناتج حدوداً لمتتابعة حسابية :

(أ) (٥ ، □ ، ٢١ ، □)

(ب) (□ ، ٢٦ ، □ ، □ ، ٤٤)

الحل :

(أ) (٥ ، □ ، ٢١ ، □)

الحد الناقص بين : ٥ ، ٢١ هو وسط بينهما

∴ قيمته = $\frac{٢١ + ٥}{٢}$ = $\frac{٢٦}{٢}$ = ١٣ .

⇐ ء = ١٣ − ٥ = ٨ .

⇐ الحد الأخير = ٢٩ .

(ب) (□ ، ٢٦ ، □ ، □ ، ٤٤)

∵ بين ٢٦ ، ٤٤ وسطين حسابيين

∴ نستطيع أن نوجد ء من العلاقة : $\frac{ب - أ}{ن - ١}$ ، حيث : ن = ٤ ، أ = ٢٦ ، ب = ٤٤

⇐ ء = ٦

∴ الحدود الناقصة على التوالي : ٢٠ ، ٣٢ ، ٣٨ .

تمارين إضافية على ماتم أخذه من دروس

السؤال الأول : أوجد الحد النوني للمتتابعات :

١

$$\left(\sqrt{٢} \;،\; \sqrt{٢\sqrt{٢}} \;،\; \sqrt{٢\sqrt{٢\sqrt{٢}}} \;،\; \sqrt{٢\sqrt{٢\sqrt{٢\sqrt{٢}}}} \;،\; .... \right)$$

٢

(٠,٩ ، ٠,٩٩ ، ٠,٩٩٩ ، ٠,٩٩٩٩ ، ....)

السؤال الثاني :

١ أيهما أكبر الحد العاشر من البداية أم الحد العاشر من النهاية في المتتابعة :

(– ٢٠ ، –١٧ ، – ١٤ ، .... ، ٣٧)

٢ إذا كانت : $م_{ن}$ ، $ب_{ن}$ متتابعتين وكان :

$م_{١} = ٤$ ، $م_{ن} = ب_{ن-١} + ٥$ ، $ب_{١} = ٢$ ، $ب_{ن} = م_{ن-١} + ١$

أثبت أن : $م_{ن}$ ، $ب_{ن}$ متتابعتان حسابيتان ، ثم أوجد : $م_{١٠٠}$.

الدرس الرابع : المتتابعات الهندسية (Geometric Sequence)

عرفنا سابقاً المتتابعة الحسابية ووجدنا أن المتتابعة تكون حسابية إذا كان الفرق بين كل حد وسابقة دائماً مقداراً ثابتاً .

والآن :

إذا لاحظنا المتتابعة التالية : (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ....) .

سنلاحظ أن الفرق بين كل حد وسابقة يختلف تماماً :

الحظ : ٤ − ٢ = ٢ ، ٨ − ٤ = ٤ ، ١٦ − ٨ = ٨

بينما : النسبة بين كل حدين اللاحق والسابق دائماً ثابتاً .

٤/٢ = ٢ ، ٨/٤ = ٢ ، ١٦/٨ = ٢

فمثل :

هذه المتتابعات التي يكون فيها النسبة بين كل حدين مقداراَ ثابتاً تسمى : **متتابعة هندسية** .

مثال آخر :

انظر للمتتابعة التالية : (٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ....)

عند إيجاد النسبة بين كل حدين سنجده دائماً مقداراَ ثابتاً .

الحظ : ١٢ ÷ ٤ = ٣ ، ٣٦ ÷ ١٢ = ٣ ، ١٠٨ ÷ ٣٦ = ٣

فهذي المتتابعة تسمى : **متتابعة هندسية** .

فما تعريف المتتابعة الهندسية ؟

تعريف المتتابعة الهندسية:

المتتابعة { $ح_ن$ } المنتهية أو الغير منتهية تسمى متتابعة هندسية إذا وجد عدداً ثابتـــاً ر

بحيث : ر = الحد اللاحق ÷ الحد السابق .

بعبارة رياضية : $ر = ح_{ن-١} ÷ ح_{ن-١}$ ، لجميع قيم ن .

ونسمي الفرق الثابت ر بأساس المتتابعة الهندسية .

الحد النوني (الحد العام) للمتتابعة الهندسية :

وهو يُكتب على الصورة : $ح_ن = أ × ر^{ن-١}$

حيث :

أ : الحد الأول . ن : رتبة الحد (أي موقع الحد في المتتابعة) .

ر : الأساس . $ح_ن$: الحد الأخير .

ملاحظات :

① أ ≠ صفر ، ر ≠ صفر

② إذا كان ر > صفر ، فإن لجميع الحدود نفس إشارة الحد الأول : أ .

③ إذا كان ر < صفر ، فإن إشارات الحدود تتعاقب بعد إشارة الحد الأول : أ .

④ إذا كان ر = ١ ، فإن قيمة أي حد تساوي قيمة الحد الأول : أ .

⑤ $ح_ن$: دالة أسية في ن (حيث ن من الدرجة الأولى) .

⑥ ن يرمز : (لعدد الحدود) أو (لرتبة الحد) أو (رتبة الحد الأخير إذا كان مجهولاً) ويمكن استخدام حرف آخر مثل م .

تذكر أن :

لإيجاد أي حد من حدود المتتابعة الهندسية لابد من إيجاد قيم : أ ، ن ، ر .

ملاحظة مهمة :

إذا عُرف في المتتابعة الحد الأول : أ ، و الأساس : ر ، فإننا نستطيع الحصول على جميع حدود المتتابعة وذلك بضرب ر في الحد السابق ، فنحصل على الحد اللاحق وهكذا نحصل على جميع حدود المتتابعة .

مثال : أوجد المتتابعة الهندسية إذا كان حدها الأول = −٢ ، وأساسها = ٤ .

الحل :

الحد الأول = أ$_{١}$ = −٢ ⟸ الحد الثاني = أ$_{٢}$ = −٢ × ٤ = −٨

⟸ الحد الثالث = أ$_{٣}$ = −٨ × ٤ = −٣٢

∴ **المتتابعة هي :** (−٢ ، −٨ ، −٣٢ ، −١٢٨ ، −٥١٢ ، ....) .

مثال :

بيِّن أي مما يلي متتابعة هندسية :

① (١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ....)

② (٧ ، ٢١ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ....)

③ (٤ ، −٣ ، $\frac{٩}{٤}$ ، −$\frac{٢٧}{١٦}$ ، ....)

الحل :

① (١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ....)

$\frac{١}{٢}$ ÷ ١ = $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ × $\frac{٢}{١}$ = $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٨}$ ÷ $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٨}$ × $\frac{٤}{١}$ = $\frac{١}{٢}$

⟸ المتابعة هندسية وأساسها = $\frac{١}{٢}$

② (٧ ، ٢١ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ....)

٢١ ÷ ٧ = ٣ ≠ ٢٤ ÷ ٢١ ⟸ المتابعة ليست هندسية .

③ (٤ ، −٣ ، $\frac{٩}{٤}$ ، −$\frac{٢٧}{١٦}$ ، ....)

هذي المتتابعة هندسية وأساسها = −$\frac{٣}{٤}$ ونترك إثباتها للطالب .

مثال :

أوجد $ح_{٨}$ في المتتابعة الهندسية : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ....) ثم اكتب الحد النوني .

الحل :

الحد العام (النوني) في المتتابعة الهندسية يكتب على الصورة : $ح_{ن} = ٲ \times ر^{ن-١}$

لإيجاد أي حد في المتتابعة نحتاج إلى قيم : ٲ ، ر ، ن لكي نعوضها في الحد العام .

في المثال : الحد الأول = ٲ = ٣

∵ ذكر في السؤال أن المتتابعة هندسية ⇐ $ر = \frac{٦}{٣} = ٢$

∵ المطلوب : $ح_{٨}$ ⇐ ن = ٨

∴ $ح_{٨} = ٣ \times (٢)^{٨-١}$ ⇐ $ح_{٨} = ٣ \times (٢)^{٧}$

⇐ $ح_{٨} = ٣٨٤$.

مثال :

متتابعة هندسية حدها الأول ٦٢٥ ، وحدها الأخير ١ ، وأساسها $\frac{١}{٥}$ فما عدد حدودها .

الحل :

لاحظ أن : عدد حدود المتتابعة = رتبة الحد الأخير ، وذكرنا ذلك في الملاحظة الأخيرة فانتبه .

المعطيات لدينا : ٲ = ٦٢٥ ، $ر = \frac{١}{٥}$. الحد الأخير = ١

من الحد العام : $ح_{ن} = ٲ \times ر^{ن-١}$

$١ = ٦٢٥ \times (\frac{١}{٥})^{ن-١}$ ⇐ $\frac{١}{٦٢٥} = (\frac{١}{٥})^{ن-١}$ ـــ قسمنا الطرفين على ٦٢٥ ـــ

⇐ $(\frac{١}{٥})^{٤} = (\frac{١}{٥})^{ن-١}$ ـــ حللنا الطرف الأيمن حتى يكون مقامه ٥ ـــ

⇐ ٤ = ن − ١ ـــ من خصائص حل المعادلات الأسية ـــ

∴ ن = ٥

⇐ عدد الحدود لهذه المتتابعة = ٥ .

تمارين على درس : المتتابعات الهندسية

١ حدد أي من المتتابعات التالية هندسية ، ثم أوجد أساسها .

(أ) (٤ ، ١٦ ، ٦٤ ، ....)

(ب) (٤ ، ٦ ، ٨ ، ....)

(ج) ($-\frac{١}{٣}$ ، ١ ، − ٣ ، ....)

(د) (س ، ٨ $س^{٢}$ ، ١٦ $س^{٣}$ ، ....)

(هـ) ($٢^{س}$ ، $٢^{٢س}$ ، $٢^{٣س}$ ، ....)

(م) (لوس ، لو $س^{٢}$ ، لو $س^{٤}$ ، ....)

٢ أوجد قيمة س في كل من المتتاليات الهندسية التالية :

(أ) (− ١٥ ، − ٤٥ ، س ، ....) (ب) (س ، ٧ ، ٣٤٣ ، ....)

٣ أوجد الحد النوني في كل من المتتابعات الهندسية التالية :

(أ) (٤ ، $\frac{٨}{٣}$ ، $\frac{١٦}{٩}$ ، ....)

(ب) (٥ ، −١٠ ، −٢٠ ، ....)

(ج) ($\frac{٣}{١٠٠}$ ، $\frac{٣}{١٠٠٠٠}$ ، $\frac{٣}{١٠٠٠٠٠٠}$ ، ....)

(د) (٠,٤ ، ٠,٠٠٤ ، ٠,٠٠٠٠٤ ، ....)

٤ أوجد الحد الثالث من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ٢ ،

والحد الخامس = ١٦٢ .

حل تمارين على درس : المتتابعات الهندسية

١ حدد أي من المتتابعات التالية هندسية ، ثم أوجد أساسها .

(أ) (٤ ، ١٦ ، ٦٤ ، ....)

الحل :

$\frac{١٦}{٤} = ٤$ ، $\frac{٦٤}{١٦} = ٤$ ⇐ المتتابعة هندسية ، وأساسها ر = ٤ .

(ب) (٤ ، ٦ ، ٨ ، ....)

الحل :

$\frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$ ⇐ النسبة غير متساوية بين كل حدين ⇐ المتتابعة ليست هندسية .

(ج) ($-\frac{١}{٣}$ ، ١ ، -٣ ، ....)

الحل :

١ ÷ $-\frac{١}{٣}$ = -٣ ، -٣ ÷ ١ = -٣ ⇐ المتتابعة هندسية ، وأساسها ر = -٣ .

(د) (س ، ٨ $س^٢$ ، ١٦ $س^٣$ ، ....)

الحل :

$\frac{٨س^٢}{س}$ = ٨ س ، $\frac{١٦س^٣}{٨س^٢}$ ٢س ⇐ النسبة غير متساوية بين كل حدين ⇐ المتتابعة ليست هندسية .

(هـ) ($٢^{س}$ ، $٢^{٢س}$ ، $٢^{٣س}$ ، ....)

الحل :

$٢^{٢س} ÷ ٢^{س} = ٢^{س}$ ، $٢^{٣س} ÷ ٢^{٢س} = ٢^{س}$ ⇐ المتتابعة هندسية ، وأساسها ر = $٢^{س}$.

(و) (لو س ، لو $س^٢$ ، لو $س^٤$ ، ....)

الحل :

لو $س^٢$ ÷ لو س = ٢لو س ÷ لو س = ٢
لو $س^٤$ ÷ لو $س^٢$ = ٤لو س ÷ ٢لو س = ٢
⇐ المتتابعة هندسية ، وأساسها ر = ٢ .

٢ أوجد قيمة س في كل من المتتاليات الهندسية التالية :

(أ) (−١٥ ، −٤٥ ، س ، ....)

الحل :

∵ المتتابعة هندسية ⟸ ر = −٤٥ ÷ −١٥ = ٣

∴ س = −٤٥ × ٣ = −١٣٥

لاتنسى أن : كل حد في المتتابعة الهندسية نحصل عليه من ضرب الحد السابق له في الأساس .

(ب) (س ، ٧ ، ٣٤٣ ، ....)

الحل :

∵ المتتابعة هندسية ⟸ ر = ٣٤٣ ÷ ٧ = ٤٩

الآن : ∵ $\frac{٧}{س}$ = ٤٩ ⟸ س = $\frac{٧}{٤٩}$ = $\frac{١}{٧}$

٣ أوجد الحد النوني في كل من المتتابعات الهندسية التالية :

(أ) (٤ ، $\frac{٨}{٣}$ ، $\frac{١٦}{٩}$ ، ....)

الحل :

لإيجاد الحد النوني لمتتابعة هندسية نحتاج إلى قيم : أ ، ر

أ = ٤ ، ر = $\frac{٨}{٣}$ ÷ ٤ ⟸ ر = $\frac{٨}{٣}$ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٢}{٣}$

∵ $ح_{ن}$ = أ × $ر^{ن-١}$

⟸ $ح_{ن}$ = ٤ × $(\frac{٢}{٣})^{ن-١}$

٣ أوجد الحد النوني في كل من المتتابعات الهندسية التالية :

(ب) (٥ ، −١٠ ، ٢٠ ، ....)

الحل :

$\text{أ} = ٥$ ، $\text{ر} = -\frac{١٠}{٥} = -٢$

$\because \text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ} \times \text{ر}^{\text{ن} - ١}$

$\Leftarrow \text{ح}_{\text{ن}} = ٥ \times (-٢)^{\text{ن} - ١}$

(ج) ($\frac{٣}{١٠٠}$ ، $\frac{٣}{١٠٠٠٠}$ ، $\frac{٣}{١٠٠٠٠٠٠}$ ، ....)

الحل :

$\text{أ} = \frac{٣}{١٠٠}$ ، $\text{ر} = \frac{٣}{١٠٠٠٠} \times \frac{١٠٠}{٣} = \frac{١}{١٠٠}$

$\because \text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ} \times \text{ر}^{\text{ن} - ١}$

$\Leftarrow \text{ح}_{\text{ن}} = \frac{٣}{١٠٠} \times \left(\frac{١}{١٠٠}\right)^{\text{ن} - ١} \quad \Leftarrow \quad \text{ح}_{\text{ن}} = ٣ \times \left(\frac{١}{١٠٠}\right)^{\text{ن}}$

(د) (٠,٤ ، ٠,٠٠٤ ، ٠,٠٠٠٠٤ ، ....)

الحل : $\text{ح}_١ = \frac{٤}{١٠}$ ، $\text{ح}_٢ = \frac{٤}{١٠٠٠}$

$\text{أ} = \frac{٤}{١٠}$ ، $\text{ر} = \frac{٤}{١٠٠٠} \times \frac{١٠}{٤} = \frac{١}{١٠٠}$

$\because \text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ} \times \text{ر}^{\text{ن} - ١}$

$\Leftarrow \text{ح}_{\text{ن}} = \frac{٤}{١٠} \times \left(\frac{١}{١٠٠}\right)^{\text{ن} - ١} \quad \Leftarrow \quad \text{ح}_{\text{ن}} = ٤ \times \left(\frac{١}{١٠٠}\right)^{\text{ن}}$

حل تمارين على درس : المتتابعات الهندسية

٤ أوجد الحد الثالث من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ٢ ، والحد الخامس = ١٦٢ .

الحل :

المطلوب الحد الثالث : $ح_{٣}$ = ؟

المعطى : $ح_{١} = أ = ٢$ ، $ح_{٥} = ١٦٢$

الآن :

من الحد العام : $ح_{ن} = أ \times ر^{ن - ١}$

نجد أن :

$ح_{٥} = ٢ \times ر^{٤}$

⇐ $١٦٢ = ٢ \times ر^{٤}$

⇐ $٨١ = ر^{٤}$

⇐ $(٣)^{٤} = ر^{٤}$

⇐ $ر = ٤$

∴ $ح_{٣} = ٢ \times ٣^{٢}$

⇐ $ح_{٣} = ١٨$

أمثلة إضافية على درس : المتتابعات الهندسية

مثال :

متتابعة هندسية $ح_{٢} = -٦$ ، $ح_{٥} = ١٦٢$ ، أوجد $ح_{٧}$ ؟

الحل :

الطريقة الأولى لاستنتاج الأساس :

$ح_{٢} = -٦ \Leftarrow ٩ر = -٦$ .... (١)

$ح_{٥} = ١٦٢ \Leftarrow ٩ر^{٤} = ١٦٢$ .... (٢)

بقسمة : (٢) ÷ (١) نجد أن :

$ر^{٣} = -٢٧ \Leftarrow ر = -٣$.

لإيجاد قيمة : ٩ نعوض في (١) بقيمة ر فنجد أن : $٩ = ٢$

$\Leftarrow ح_{٧} = ٢ \times (-٣)^{٧-١} \Leftarrow ح_{٧} = ٢ \times (-٣)^{٦} \Leftarrow ح_{٧} = ١٤٥٨$

الطريقة الثانية لاستنتاج الأساس باستخدام القاعدة التالية :

قانون لاستنتاج أساس المتتابعة الهندسية إذا علم حدان فيها :

إذا كان : $ح_{م}$ ، $ح_{هـ}$ حدين في المتتابعة الهندسية $ح_{ن}$ ، فإن : $ر^{م-هـ} = \frac{ح_{م}}{ح_{هـ}}$

$\because ح_{٢}$ ، $ح_{٥}$ حدان في المتتابعة $\Leftarrow ر^{٥-٢} = \frac{ح_{٥}}{ح_{٢}} = \frac{١٦٢}{-٦} = -٢٧$

$\Leftarrow ر^{٣} = -٢٧ \Leftarrow ر = -٣$.

بقية الخطوات مثلما في الأعلى .

ملاحظة :

عند التعويض في هذه القاعدة فإن اختيار $ح_{م}$ و $ح_{هـ}$ ليس له ضابط إلا أننا إذا اخترنا $ح_{م}$ في البسط فنبدأ في الدرجة بالرتبة م ، ويفضل البدء بالرتبة الأكبر خروجاً من أن تكون درجة ر سالبة .

أمثلة إضافية على درس : المتتابعات الهندسية

مثال :

ما هو رتبة الحد الذي قيمته ١٢٨ في متتابعة هندسية فيها : ح$_{م}$ = ٤ ، ح$_{ه}$ = ٣٢ ؟

الحل :

لاننسى أن : رتبة الحد هي المجهول ن .

لإيجاد رتبة الحد الذي قيمته : ١٢٨ نعوض في الحد العام : ح$_{ن}$ = ا × ر$^{ن - ١}$

ولكن نحتاج إلى قيم : ا ، ر . فنستفيد من المعطيات في السؤال .

معطى :

ح$_{م}$ = ٤ ، ح$_{ه}$ = ٣٢

فعند التعويض في القاعدة السابقة نجد أن :

ر$^{٥ - ٢}$ = $\frac{٣٢}{٤}$ ⇐ ر^{٣} = ٨ ⇐ **ر = ٢**

وعند التعويض في أحد الحدين في الأعلى بقيمة ر نجد أن : **ا = ٢**

الآن :

١٢٨ = ٢ × (٢)$^{ن - ١}$

⇐ ٦٤ = (٢)$^{ن - ١}$

⇐ (٢)^{٦} = (٢)$^{ن - ١}$

⇐ ن − ١ = ٦

⇐ ن = ٧

∴ رتبة الحد الذي قيمته : ١٢٨ السابعة

أمثلة إضافية على درس : المتتابعات الهندسية

مثال :

متتابعة هندسية يزيد حدها الثالث عن حدها الثاني بمقدار ٦ ، ويزيد حدها الرابع عن حدها الثاني بمقدار ١٨ فما هي المتتابعة ؟

الحل :

ملاحظة : لإيجاد المتتابعة الهندسية نحتاج إلى قيم : أ ، ر .

نقوم بتفسير هذي المعلومات بصورة رياضية كالتالي :

يزيد حدها الثالث عن حدها الثاني بمقدار ٦ ⇐ $ح_{٣} = ح_{٢} + ٦$

ويزيد حدها الرابع عن حدها الثاني بمقدار ١٨ ⇐ $ح_{٤} = ح_{٢} + ١٨$

الآن : نعوض عن : $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$ في الصورة العامة : $ح_{ن} = أ × ر^{ن - ١}$

∴ $أ ر^{٢} = أ ر + ٦$ ⇐ $أ ر^{٢} - أ ر = ٦$ ⇐ $أ ر (ر - ١) = ٦$ .... (١)

$أ ر^{٣} = أ ر + ١٨$ ⇐ $أ ر^{٣} - أ ر = ١٦$ ⇐ $أ ر (ر^{٢} - ١) = ١٨$ .... (٢)

الآن : بقسمة : (٢) على (١) نجد أن :

$$\frac{أ ر (ر^{٢} - ١)}{أ ر (ر - ١)} = \frac{١٨}{٦}$$ (نختصر بين البسط والمقام)

$$\frac{(ر - ١)(ر + ١)}{(ر - ١)} = ٣$$ (حللنا البسط إلى فرق بين مربعين مع الاختصار)

⇐ $ر + ١ = ٣$ ⇐ $ر = ٢$

الآن : بالتعويض بقيمة ر في المعادلة : (١) لإيجاد أ :

⇐ $٢أ (٢ - ١) = ٦$ ⇐ $٢ أ = ٦$ ⇐ $أ = ٣$

∴ **المتتابعة هي : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ....)**

واضح في المتتابعة أن الحد الثالث يزيد عن الثاني بمقدار ٦ والرابع عن الثاني بمقدار ١٨ .

تمارين إضافية على درس : المتتابعات الهندسية

١ متتابعة هندسية حدها الرابع – ٤ ، وحدها السابع ٦٤ ، أوجد هذه المتتابعة .

٢ إذا كانت قيمة قطعة أرض هي ١٢٠.٠٠٠ ريال وبعد ثلاث سنوات أصبحت ٤٨٠.٠٠٠ ريال بافتراض أن قيمة الأرض على شكل متتابعة هندسية ما هي القيمة المتوقعة للأرض بعد خمس سنوات .

٣ أوجد المتتابعة الهندسية التي يزيد فيها الحد الثالث عن الثاني بمقدار ٦ والحد الرابع يزيد عن الحد الثالث بمقدار ٤ .

٤ متتابعة هندسية مكونة من ثلاثة حدود مجموعها ٢١ ، وحاصل ضربها ٦٤ أوجد هذه الحدود .

سؤال خاص للجادين :

إذا كانت : ($أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ، .....) متتابعة حسابية أساسها = أ ، أثبت أن :

($١٠^{أ_{١}}$ ، $١٠^{أ_{٢}}$ ، $١٠^{أ_{٣}}$ ، ......)

تمثل متتابعة هندسية وأوجد أساسها .

تمارين إضافية على درس : المتتابعات الهندسية

٣ **أوجد المتتابعة الهندسية التي يزيد فيها الحد الثالث عن الثاني بمقدار ٦ والحد الرابع يزيد عن الحد الثالث بمقدار ٤ .**

الحل :

$ح_٣ = ح_٢ + ٦ \Leftarrow ح_٣ - ح_٢ = ٦ \Leftarrow أ ر^٢ - أ ر = ٦ \Leftarrow أ ر (ر - ١) = ٦$ ......(١)

$ح_٤ = ح_٣ + ٤ \Leftarrow ح_٤ - ح_٣ = ٤ \Leftarrow أ ر^٣ - أ ر^٢ = ٤ \Leftarrow أ ر^٢ (ر - ١) = ٤$ ......(٢)

بقسمة (٢) ÷ (١) نجد أن : $ر = \frac{٤}{٦} \Leftarrow ر = \frac{٢}{٣}$

بالتعويض في (١) نجد أن :

$أ \times \frac{٢}{٣} (\frac{٢}{٣} - ١) = ٦ \Leftarrow أ \times \frac{٢}{٣} \times -\frac{١}{٣} = ٦$

$\Leftarrow -أ \times \frac{٢}{٩} = ٦$

$\Leftarrow -٢أ = ٥٤$

$\Leftarrow أ = -٢٧$.

لاتنسى :

للحصول على المتتابعة الهندسية نضرب الحد السابق في الأساس فنحصل على الحد اللاحق .

∴ المتتابعة : (−٢٧ ، −١٨ ، −١٢ ، −٨ ، ....)

٤ متتابعة هندسية مكونة من ثلاثة حدود مجموعها ٢١ ، وحاصل ضربها ٦٤ أوجد هذه الحدود .

الحل :

من قانون الحد العام نجد أن صورة الحدود الثلاثة المتتالية هي : أ ، أ ر ، أ ر^{٢}

∴ أ + أ ر + أ ر^{٢} = ٢١ ....(١)

أ × أ ر × أ ر^{٢} = ٦٤ ⇐ أ^{٣} ر^{٣} = ٦٤

⇐ (أ ر)^{٣} = ٦٤

⇐ أ ر = ٤ ⇐ ر = ٤/أ

الآن : بالتعويض بقيمة ر في (١) نجد أن :

أ + ٤ + ١٦/أ = ٢١ ⇐ أ + ١٦/أ = ١٧

⇐ أ^{٢} + ١٦ = ١٧ أ (بتوحيد المقامات وضرب طرفين في وسطين)

⇐ أ^{٢} − ١٧أ + ١٦ = ٠

⇐ (أ − ١) (أ − ١٦) = ٠

∴ إما أ = ١ ، أ = ١٦

وإذا كانت : أ = ١ ⇐ ر = ٤ ، بينما إذا كانت : أ = ١٦ ⇐ ر = ١/٤ .

إذا كانت ر = ٤ ستكون حدود المتتابعة : (١ ، ٤ ، ١٦)

بينما إذا كانت ر = ١/٤ ستكون الحدود : (١٦ ، ٤ ، ١)

سؤال خاص للجادين :

إذا كانت : ($أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ، .....) متتابعة حسابية أساسها = أ ، أثبت أن :

($١٠^{أ_{١}}$ ، $١٠^{أ_{٢}}$ ، $١٠^{أ_{٣}}$ ، ......)

تمثل متتابعة هندسية وأوجد أساسها .

الحل :

أولاً :

∵ المتتابعة : ($أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ، .....) حسابية

⇐ $أ_{٢} - أ_{١} = أ$ ، $أ_{٣} - أ_{٢} = أ$

للإثبات ننطلق من تعريف المتتابعة الهندسي وهو أن النسبة بين كل حدين دائماً مقداراً ثابتاً ، فإذا تحقق ذلك تكون المتتابعة هندسية .

الآن : $١٠^{أ_{٢}} \div ١٠^{أ_{١}} = ١٠^{أ_{٢} - أ_{١}}$ (من خصائص الأسس)

$= ١٠^{أ}$ (معطى أن : $أ_{٢} - أ_{١} = أ$)

كذلك : $١٠^{أ_{٣}} \div ١٠^{أ_{٢}} = ١٠^{أ_{٣} - أ_{٢}}$

$= ١٠^{أ}$

واضح أن النسبة بين كل حدين = مقداراً ثابتاً

⇐ المتتابعة هندسية وأساسها = $١٠^{أ}$

الدرس الخامس : الأوساط الهندسية :

تعريف الأوساط الهندسية :

الأوساط الهندسية بين العددين أ و ب هي عبارة عن حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الأول أ و حدها الأخير ب وعُرف عدد حدودها مسبقاً .

تذكر أن :

(١) عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢ .

(٢) لإيجاد قيمة ر في حالة الأوساط الهندسية نستخدم القانون : $ر^{ن-١} = \frac{ب}{أ}$

حيث : أ : الحد الأول ، ب : الحد الأخير ، ن : عدد الحدود ، ر : الأساس .

حالة خاصة :

إذا كان المطلوب وسطاً هندسياً واحداً فقط فإن : الوسط الهندسي = $\pm\sqrt{أ \times ب}$

الدرس الخامس : الأوساط الهندسية :

مثال :

أدخل وسطين هندسيين بين العددين : − ٧ ، $\frac{١٨٩}{٨}$.

الحل :

−٧	،	⬜	،	⬜	،	$\frac{١٨٩}{٨}$

∵ المطلوب وسطين ⟸ عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢ = ٤

⟸ $ر^{٣} = \frac{١٨٩}{٨} \div -٧ = \frac{١٨٩}{٨} \times -\frac{١}{٧} = -\frac{٢٧}{٨}$

⟸ $ر = -\frac{٣}{٢}$ (بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين)

∴ المتتابعة هي : − ٧ ، $\frac{٢١}{٢}$ ، $-\frac{٦٣}{٤}$ ، $\frac{١٨٩}{٨}$

∴ الوسطان هما : $\frac{٢١}{٢}$ ، $-\frac{٦٣}{٤}$

مثال : أدخل أربعة أوساط هندسية بين : ٦٤ ، − ٢

الحل :

∵ $ر^{ن-١} = \frac{ب}{أ}$ ، ن = ٦ ، أ = ٦٤ ، ب = − ٢

⟸ $ر^{٥} = -\frac{٢}{٦٤}$ = ⟸ $ر^{٥} = -\frac{١}{٣٢}$ ⟸ $ر^{٥} (-\frac{١}{٢})^{٥}$ ⟸ $ر = -\frac{١}{٢}$

∴ الأوساط هي : − ٣٢ ، ١٦ ، − ٨ ، ٤

الدرس الخامس : الأوساط الهندسية :

مثال :

أدخل وسطاً هندسياً بين : ٦ ، ١٥٠ .

الحل :

الوسط الهندسي = $\pm\sqrt{أ \times ب}$

⇐ الوسط الهندسي = $\pm\sqrt{٦ \times ١٥٠} = \pm\sqrt{٩٠٠} = \pm ٣٠$.

مثال :

إذا كان لدينا عددان موجبان الفرق بينهما ٧ ووسطهما الهندسي ١٢ فما هما العددان ؟

الحل :

نفرض أن العددين هما : أ ، ب .

∵ الفرق بينهما = ٧

⇐ أ − ب = ٧ ⇐ أ = ٧ + ب .... (١)

∵ وسطهما الهندسي = ١٢

⇐ $\pm\sqrt{أ \times ب}$ = ١٢ بتربيع الطرفين نجد أن :

أ × ب = ١٤٤ .... (٢)

بتعويض (١) في (٢) نجد أن :

(٧ + ب) × ب = ١٤٤

⇐ ب^{٢} + ٧ب − ١٤٤ = ٠

⇐ (ب − ٩) (ب + ١٦) = ٠ بالتحليل

∴ إما ب = ٩ ⇐ أ = ١٦

أو ب = −١٦ ⇐ أ = − ٩ .

تطبيقات على الدرس الخامس : الأوساط الهندسية :

[١] أدخل الأوساط المطلوبة فيما يلي :

(١) وسطين هندسيين بين : ٩ ، – ٢٤٣ .

(٢) وسطاً هندسياً بين : ٦ ، ١٥٠ .

[٢] إذا كان الوسط الحسابي بين عددين : $\frac{1}{2}$ ٦ ، والوسط الهندسي بينهما = ٦ ، فأوجد هذين الحدين .

[٣] الوسط الهندسي الرابع بين حدين ٨١ ، والوسط الهندسي الأول بينهما ٢٤ ، أوجد هذه المتتابعة .

[٤] كم وسطاً هندسياً يمكن إدخاله بين الحدين : ٢ ، ٤٨٦ من متتالية هندسية أساسها ٣ .

الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

تعريف :

إذا كانت $\{\text{ح}_{\text{ن}}\}$ متتابعة حسابية منتهية ، أو متتابعة هندسية منتهية فإن المجموع :

$$\text{ج}_{\text{م}} = \text{ح}_{١} + \text{ح}_{٢} + \text{ح}_{٣} + \ldots\ldots + \text{ح}_{\text{م}} = \sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \text{ح}_{\text{ن}}$$

يسمى متسلسلة حسابية منتهية أو متسلسلة هندسية منتهية عدد حدودها م .

حيث :

$\text{ح}_{\text{م}}$: الحد الأخير للمتسلسلة . م : رتبة الحد الأخير أو عدد الحدود .

$\sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \text{ح}_{\text{ن}}$: الصورة المختصرة للمتسلسلة بالاستفادة من رمز المجموع .

مثال :

بيِّن نوع كل المتسلسلة واكتبها بصورة مختصرة :

Ⓐ ٦ + ١٠ + ١٤ + ١٨ + ... + (٤ م + ٢)

الحل :

Ⓐ $\text{ج}_{\text{م}}$ = ٦ + ١٠ + ١٤ + ١٨ + ... + (٤ م + ٢)

$\text{ح}_{٢} - \text{ح}_{١} = ١٠ - ٦ = ٤$

$\text{ح}_{٣} - \text{ح}_{٢} = ١٤ - ١٠ = ٤$

⇐ المتسلسلة حسابية

$\text{ح}_{\text{ن}} = (٤\,\text{ن} + ٢)$

$$\Leftarrow \text{ج}_{\text{م}} = \sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \text{ح}_{\text{ن}} = \sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} ٢ + ٤\,\text{ن} \ .$$

مثال :

بيِّن نوع كل متسلسلة واكتبها بصورة مختصرة :

① ٤ + ٩ + ١٤ + ١٩ + ... + (٥م − ١)

② ٢ + ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ + ... + (٢ × $(\frac{١}{٢})^{م + ١}$)

الحل :

① جـ$_م$ = ٤ + ٩ + ١٤ + ١٩ + ... + (٥م − ١)

ح$_٢$ − ح$_١$ = ٩ − ٤ = ٥
ح$_٣$ − ح$_٢$ = ١٤ − ٩ = ٥
⇐ المتسلسلة حسابية

ح$_ن$ = (٥ ن − ١)

⇐ جـ$_م$ = $\sum_{ن=١}^{م}$ ح$_ن$ = $\sum_{ن=١}^{م}$ ٢ + ٤ ن .

تذكير :

استنتاج الحد العام من قانون الحد العام للمتابعة الحسابية : ح$_ن$ = أ + (ن − ١) × ء

الحل :

② ٢ + ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ + ... + (٢ × $(\frac{١}{٢})^{م + ١}$)

ح$_٢$ ÷ ح$_١$ = ١ ÷ ٢ = $\frac{١}{٢}$
ح$_٣$ ÷ ح$_٢$ = $\frac{١}{٢}$ ÷ ١ = $\frac{١}{٢}$
⇐ المتسلسلة هندسية

ح$_ن$ = ٢ × $(\frac{١}{٢})^{ن + ١}$

⇐ جـ$_م$ = $\sum_{ن=١}^{م}$ ح$_ن$ = $\sum_{ن=١}^{م}$ ٢ × $(\frac{١}{٢})^{ن + ١}$.

مثال :

اكتب المتسلسلة التالية بصورة مفصلة وبيِّن نوعها :

(أ) جـ∞ = $\sum_{ن=١}^{\infty} ٣^{ن}$ (ب) جـ∞ = $\sum_{ن=١}^{\infty} ٢ \times ٣^{ن-١}$ (جـ) جـ∞ = $\sum_{ن=١}^{\infty} (٢ن + ٥)$

الحل :

(أ) جـ∞ = $\sum_{ن=١}^{\infty} ٣^{ن}$ = ٣ + ٩ + ٢٧ + …………

واضح جداً أن المتسلسلة هندسية .

(ب) جـ∞ = $\sum_{ن=١}^{\infty} ٢ \times ٣^{ن-١}$ = ٢ + ٦ + ١٨ + ٥٤ + ……………

كذلك واضح جداً أن المتسلسلة هندسية .

(جـ) جـ∞ = $\sum_{ن=١}^{\infty} (٢ن + ٥)$ = ٧ + ٩ + ١١ + ١٣ + ……………

واضح جداً أن المتسلسلة حسابية .

فائدة مهمة :

١ المتتابعة أو المتسلسلة الحسابية هي دالة من الدرجة الأولى على الصورة : (ء ن + جـ) ، وأساسها هو : ء معامل المجهول .

٢ المتتابعة أو المتسلسلة الهندسية هي دالة أسية على الصورة : (أ × $ر^{ن-١}$) ، وأساسها هو : ر ، وحدها الأول هو : أ .

قانون إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية :

عرفنا سابقاً مفهوم المتسلسلة وقلنا أن المتسلسلة هي حاصل جمع حدود المتتابعة والآن سنستنتج قانون لإيجاد حاصل جمع حدود المتتابعة الحسابية كالتالي :

إذا أعطيت المتتابعة الحسابية : (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠)

نفرض أن حاصل جمعها هو : جـ .

∴ جـ = ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ ....(١)

بكتابة الطرف الأيسر من (١) ابتداء من الحد الأخير نجد أن :

جـ = ١٠ + ٨ + ٦ + ٤ + ٢ ....(٢)

بجمع : (١) + (٢) نجد :

٢ جـ = (٢ + ١٠) + (٤ + ٨) + (٦ + ٦) + (٨ + ٤) + (١٠ + ٢)

⇐ ٢ جـ = ١٢ + ١٢ + ١٢ + ١٢ + ١٢

⇐ ٢ جـ = ٥ × ١٢

⇐ جـ = $\frac{٥}{٢}$ × (٢ + ١٠)

∴ مجموع المتسلسلة الحسابية = جـ = $\frac{\text{عدد الحدود}}{٢}$ (الحد الأول + الحد الأخير)

∴ ممكن صياغة قانون المجموع كالتالي :

$$ج_م = \frac{م}{٢}\left[\,أ + ح_م\,\right]$$

حيث :

أ : الحد الأول . ، م : عدد الحدود . $ح_م$: الحد الأخير . ، $ج_م$: مجموع م من الحدود .

وعند التعويض في هذا القانون عن الحد العام [$ح_م$ = أ + (م − ١) × ء] نحصل على القانون الثاني من قوانين مجموع المتسلسلة الحسابية وهو :

$$ج_م = \frac{م}{٢}\left[\,٢أ + (م − ١) × ء\,\right]$$

ويمكن تلخيص قوانين المتسلسلة الحسابية في النظرية التالية :

نظرية :

لتكن $\text{جـ}_م = \sum_{ن=1}^{م} ح_ن$ حيث $\{ ح_ن \}$ متتابعة حسابية منتهية حدها الأول = ا ، وأساسها = ء ، وعدد حدودها = م ، فإن مجموعها يُعطى بالعلاقتين التاليتين :

① $\text{جـ}_م = \frac{م}{٢} \left[٢ا + (م - ١) \times ء \right]$ ؛ الصورة العامة

② $\text{جـ}_م = \frac{م}{٢} \left[ا + ح_م \right]$ ؛ حالة خاصة

حيث :

ا : الحد الأول . ، ء : أساس المتتابعة . ، م : عدد الحدود .

$ح_م$: الحد الأخير . ، $\text{جـ}_م$: مجموع الحدود .

مثال :

أوجد مجموع المتسلسلات التالية : $\text{جـ}_٤ = \sum_{ن=1}^{٤} (٢ن + ١)$

الحل :

المتسلسلة واضح أنها حسابية لأنها دالة من الدرجة الأولى أساسها معامل ن أي أن ء = ٢ .

ولإيجاد الحد الأول نعوض عند ن = ١ فنجد أن : ا = ٣ .

نعوض في القانون : $\text{جـ}_م = \frac{م}{٢} \left[٢ا + (م - ١) \times ء \right]$ حيث : م = ٤

$\therefore \text{جـ}_٤ = \frac{٤}{٢} \left[٦ + ٦ \right] = ٢ \times ١٢ = ٢٤$.

مثال :

أوجد مجموع الأربعين الحد الأولى من المتتابعة الحسابية التالية : (٣ ، ٧ ، ١١ ، ....)

الحل :

المتتابعة حسابية فيها :

ا = ٣ ، ء = ٤ ، م = ٤٠

جـ$_{٤٠}$ = $\frac{م}{٢}$ [٢ا + (م − ١) × ء]

⇐ جـ$_{٤٠}$ = ٢٠ [٦ + ٣٩ × ٤]

= ٢٠ × [٦ + ١٥٦]

= ٢٠ × ١٦٢

∴ جـ$_{٤٠}$ = ٣٢٤٠

مثال :

أوجد مجموع المتسلسلات التالية : جـ$_{٢٠}$ = $\sum_{ر=١}^{٢٠}$ (٣ر + ١)

الحل :

جـ$_{٢٠}$ = ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ + ح$_{٣}$ + ... + ح$_{٢٠}$

= ٤ + ٧ + ١٠ + ... + ٦١

واضح أن المتسلسلة حسابية حيث :

جـم = $\frac{م}{٢}$ [ا + حم] ، ا = ٤ ، م = ٢٠ ، حم = ٦١

⇐ جـ$_{٢٠}$ = $\frac{٢٠}{٢}$ [٤ + ٦١]

= ١٠ × ٦٥

= ٦٥٠

مثال : مجموع الأربعين الحد الأولى من متتابعة حسابية ٤٣٠ ومجموع أول ستين حداً منها هو ٩٤٥ أوجد الحد العاشر لهذه المتتابعة .

الحل :

أولاً : نضع المعطيات بصورة رياضية :

جـ٤٠ = ٤٣٠ ، جـ٦٠ = ٩٤٥ ، المطلوب : ح١٠ .

لإيجاد أي حد من المتتابعة نحتاج إلى قيم : ٢ ، ء .

الآن : من قانون مجموع المتسلسلة الحسابية : جـم = م/٢ [٢٢ + (م − ١) × ء]

حيث : م : عدد الحدود ، ٢ : الحد الأول ، ء : أساس المتتابعة .

⇐ جـ٤٠ = ٢٠ [٢٢ + ٣٩ × ء]

⇐ ٤٣٠ = ٤٠ ٢ + ٧٨٠ ء ....(١)

كذلك :

جـ٦٠ = ٣٠ [٢٢ + ٥٩ × ء]

⇐ ٩٤٥ = ٦٠ ٢ + ١٧٧٠ ء ....(٢)

الآن : بضرب (١) في : − ١,٥ نجد أن :

− ٦٤٥ = − ٦٠ ٢ − ١١٧٠ ء ....(٣)

الآن : بجمع : (٢) + (٣) نجد أن :

٣٠٠ = ٦٠٠ ء ⇐ ء = ١/٢

بالتعويض بقيمة : ء في (١) نجد أن :

٤٣٠ = ٤٠ ٢ + ٣٩٠ ⇐ ٤٠ = ٤٠ ٢ ⇐ ٢ = ١

∴ الحد العاشر = ح١٠ = ٢ + ٩ × ء

⇐ ح١٠ = ١ + ٩ × ١/٢

⇐ ح١٠ = ٥ ١/٢

الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

مثال :

أوجد عدد حدود المتسلسلة : $\sum_{ن=1}^{م} (٢ ن - ١٦) =$ صفر .

الحل :

جـم $= \sum_{ن=1}^{م} (٢ ن - ١٦) = (- ١٤) + (- ١٢) + (- ١٠) + ... + (٢ن - ١٦)$

واضح أن المتسلسلة حسابية : أ = - ١٤ ء = ٢

بالتعويض في القانون العام : جـم $= \frac{م}{٢} [٢أ + (م - ١) \times ء]$

حيث : جـم = صفر ، أ = - ١٤ ، ء = ٢

∴ صفر $= \frac{م}{٢} [- ٢٨ + ٢م - ٢]$

⇐ صفر $= \frac{م}{٢} [٢م - ٣٠]$

⇐ $م^٢ - ١٥ م = ٠$

⇐ $م (م - ١٥) = ٠$

⇐ إما م = ٠ مرفوض أو م = ١٥ مقبول وهو عدد الحدود .

الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

مثال :

أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية :

$جـ_{١٩} = \sum_{ر=١}^{١٩} ح_ر$ ، علماً بأن : $ح_{١٢} = ١٣٠$ ، $ح_{١٩} = ١١٦$

الحل :

∵ المتسلسلة حسابية منتهية ⇐ $جـ_م = \frac{م}{٢}[أ + ح_م]$

∵ $ح_{١٢} = ١٣٠$ ⇐ أ + ١١ ء = ١٣٠ .... (١)

∵ $ح_{١٩} = ١١٦$ ⇐ أ + ١٨ ء = ١١٦ .... (٢)

بطرح (٢) – (١) نجد أن : ٧ ء = –١٤ ⇐ ء = –٢

وبالتعويض في (١) نجد أن : أ = ١٥٢ .

∵ $جـ_م = \frac{م}{٢}[أ + ح_م]$

⇐ $جـ_{١٩} = \frac{١٩}{٢}[١٥٢ + ١١٦] = \frac{١٩}{٢} \times ٢٦٨ = ١٩ \times ١٣٤ = ٢٥٤٦$.

تمارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

١ أوجد مجموع الحدود الستين الأولى من المتتالية الحسابية : (− ٧ ، − ٢ ، ٣ ، ....)

٢ متتابعة حسابية $ح_{م}$ = ٧ ، $ح_{١٣}$ = ٤٠ أوجد المتتابعة ثم أوجد $\sum_{ن=١}^{١٩} ح_{ن}$ = $جـ_{١٩}$.

٣ إذا كان مجموع المتسلسلة الحسابية $جـ_{م}$ = $\sum_{ن=١}^{م}$ (٣ن + ٥) = ٢١٥ ، فما هــو عــدد الحدود م .

٤ تعهد مقاول في بناء مشروع بأنه في حالة تأخره في بناء المشروع فإنه يدفع غرامة في اليوم الأول ١٠٠٠ ريال ، أما الأيام الأخرى فإنه يدفع في كل يوم غرامه تزيد ٥٠ ريالاً عن اليوم السابق له ، فإذا كان مجموع الغرامات التي دفعها المقاول هو ١٥٣٠٠ ريالاً فكم عدد أيام التأخير .

٥ متسلسلة حسابية مجموع الحدود الستة الأولى منها = − ٤٢ ، ومجموع الحدود الستة الأخيرة منها = ٣٠ فإذا كان عدد حدودها = ١٢ ، أوجد :

(١) أساسها (٢) حدها الأول (٣) حدها الأخير

سؤالان للجادين :

١ أثبت أن مجموع ن حداً الأولى من الأعداد الفردية الموجبة :

(١ ، ٣ ، ٥ ، .... ، ٢ن − ١) = $ن^{٢}$

٢ أوجد مجموع المتسلسلة :

١ − ٣ + ٥ − .... + ٢٠٠١ − ٢٠٠٣ + ٢٠٠٥ − ٢٠٠٧

تمارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

١ أوجد مجموع الحدود الستين الأولى من المتتالية الحسابية :

(− ٧ ، − ٢ ، ٣ ، ....)

الحل :

∵ المتتابعة حسابية ⟸ أ = − ٧ ، ء = ٥ ، م = ٦٠

∴ $ج_م = \frac{م}{٢} \left[٢أ + (م - ١) \times ء \right]$

⟸ $ج_{٦٠} = \frac{٦٠}{٢} \left[٢ \times - ٧ + ٥٩ \times ٥ \right]$

⟸ $ج_{٦٠} = ٣٠ \times \left[- ١٤ + ٢٩٥ \right]$

⟸ $ج_{٦٠} = ٣٠ \times ٢٨١$

∴ $ج_{٦٠} = ٨٤٣٠$

٢ متتابعة حسابية $ح_٢ = ٧$ ، $ح_{١٣} = ٤٠$ أوجد المتتابعة

، ثم أوجد $\sum_{ر=١}^{١٩} ح_ر = جـ_{١٩}$.

الحل :

المطلوب : **١** المتتابعة . **٢** مجموع تسعة عشر حداً منها .

∵ $ح_٢ = ٧$ ⇐ أ + ء = ٧ ....(١)

∵ $ح_{١٣} = ٤٠$ ⇐ أ + ١٢ ء = ٤٠ ....(٢)

بضرب المعادلة (١) × − ١ ، و جمعها مع المعادلة (٢) : نجد أن :

١١ ء = ٣٣ ⇐ **ء = ٣**

بالتعويض عن قيمة ء في (١) نجد أن : **أ = ٤** .

∴ المتتابعة هي : (٤ ، ٧ ، ١٠ ، ....)

$جـ_{١٩} = \frac{١٩}{٢} [٢ × ٤ + ١٨ × ٣]$

$= \frac{١٩}{٢} [٨ + ٥٤]$

$= \frac{١٩}{٢} × ٦٢$

∴ $جـ_{١٩} = ٥٨٩$

تمارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

٣ إذا كان مجموع المتسلسلة الحسابية $\text{جـ}_{م} = \sum_{ر=١}^{م} (٣ر + ٥) = ٢١٥$ ،
فما هو عدد الحدود م .

الحل :

$\text{جـ}_{م} = \sum_{ر=١}^{م} (٣ر + ٥) = (٨ + ١١ + ١٤ + ١٧ + ...) = ٢١٥$

واضح أن : أ = ٨ ، ء = ٣

∴ من قانون مجموع المتسلسلة الحسابية $\text{جـ}_{م} = \frac{م}{٢} [٢أ + (م - ١) \times ء]$ نجد أن :

$٢١٥ = \frac{م}{٢} [٢ \times ٨ + (م - ١) \times ٣]$

⇐ $٢١٥ = \frac{م}{٢} [١٦ + ٣م - ٣]$

⇐ $٢١٥ = \frac{م}{٢} [١٣ + ٣م]$

⇐ $٤٣٠ = م [١٣ + ٣م]$

⇐ $٣م^{٢} + ١٣م - ٤٣٠ = ٠$ — بالتحليل أو بغيرها من الطرق —

⇐ م = ١٠ — مقبول — ، $م = -\frac{٤٣}{٣}$ — مرفوض —

∴ عدد الحدود = ١٠ حدود .

تمارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

٤ تعهد مقاول في بناء مشروع بأنه في حالة تأخره في بناء المشروع فإنه يدفع غرامة في اليوم الأول ١٠٠٠ ريال ، أما الأيام الأخرى فإنه يدفع في كل يوم غرامه تزيد ٥٠ ريالاً عن اليوم السابق له ، فإذا كان مجموع الغرامات التي دفعها المقاول هو ١٥٣٠٠ ريالاً فكم عدد أيام التأخير .

الحل :

∵ المقاول سيدفع في اليوم الأول ١٠٠٠ ريالاً .

في اليوم الثاني سيدفع : ١٠٥٠ ريالاً .

في اليوم الثالث سيدفع : ١١٠٠ ريال وهكذا .

∴ ماسيدفعه المقاول من غرامات تمثل متتابعة حسابية حدها الأول = أ = ١٠٠٠

وأساسها ء = ٥٠ .

مجموع الغرامات التي دفعها المقاول = ١٥٣٠٠ ريال .

⇐ جـ م = ١٥٣٠٠ .

المطلوب عدد أيام التأخير = م .

∴ من قانون مجموع المتسلسلة الحسابية جـ م = $\frac{م}{٢}$ [٢أ + (م − ١) × ء] نجد أن :

١٥٣٠٠ = $\frac{م}{٢}$ [٢٠٠٠ + ٥٠ م − ٥٠]

⇐ ٣٠٦٠٠ = م [١٩٥٠ + ٥٠ م]

⇐ ٥٠ م^{٢} + ١٩٥٠ م − ٣٠٦٠٠ = ٠ ـ بالتحليل أو بغيرها من الطرق ـ

⇐ م = ١٢ ـ مقبول ـ ، م = − ٥١ ـ مرفوض ـ

∴ عدد أيام التأخير = ١٢ يوماً .

تمارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

٥ متسلسلة حسابية مجموع الحدود الستة الأولى منها = − ٤٢ ، ومجموع الحدود الستة الأخيرة منها = ٣٠ فإذا كان عدد حدودها = ١٢ ، أوجد :

① أساسها ② حدها الأول ③ حدها الأخير

الحل :

∵ مجموع الحدود الستة الأولى منها = − ٤٢

⇐ أ + أ + د + أ + ٢ د + أ + ٣ د + أ + ٤ د + أ + ٥ د = − ٤٢

⇐ ٦ أ + ١٥ د = − ٤٢ ....(١)

∵ مجموع الحدود الستة الأخيرة منها = ٣٠

⇐ أ + ٦ د + أ + ٧ د + أ + ٨ د + أ + ٩ د + أ + ١٠ د + أ + ١١ د = − ٤٢

⇐ ٦ أ + ٥١ د = ٣٠ ....(٢)

بطرح : (١) − (٢) نجد أن :

− ٣٦ د = − ٧٢ ⇐ **د = ٢**

بالتعويض في (١) نجد أن : **أ = − ٧٢**

الحد الأخير = ح١٢ = أ + ١١ د

⇐ **ح١٢ = − ٥٠**

تمارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

سؤالان للجادين :

١ أثبت أن مجموع ن حداً الأولى من الأعداد الفردية الموجبة :

(١ ، ٣ ، ٥ ، .... ، ٢ن – ١) = ن٢

الحل :

١ + ٣ + ٥ + ... + ٢ن – ١ تمثل متسلسلة حسابية فيها :

أ = ١ ، ء = ٢ ، عدد الحدود = م = ن .

∴ من قانون مجموع المتسلسلة الحسابية جم = م/٢ [٢أ + (م – ١) × ء] نجد أن :

جن = ن/٢ [٢ + ٢ن – ٢]

⇐ جن = ن/٢ [٢ن]

⇐ جن = ن٢

∴ مجموع ن حداً من الأعداد الفردية = ن٢

تمارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

سؤالان للجادين :

٢ أوجد مجموع المتسلسلة :

١ – ٣ + ٥ – .... + ٢٠٠١ – ٢٠٠٣ + ٢٠٠٥ – ٢٠٠٧

الحل :

نلاحظ أن الفرق بين كل حدين = ٢

∴ نستطيع أن نستنتج المجموع إذا استطعنا معرفة عدد الحدود لهذه المتسلسلة حيث أن المجموع سوف يساوي :

(عدد الحدود ÷ ٢) × ٢ ⇐ المجموع = عدد الحدود .

الآن : كيف نستنتج عدد الحدود ؟

نستطيع أن نستفيد من مفهوم المتتابعة الحسابية لاستنتاج عدد الحدود كالتالي :

(١ ، ٣ ، ٥ ، .... ، ٢٠٠١ ، ٢٠٠٣ ، ٢٠٠٥ ، ٢٠٠٧)

هذه المتتابعة حسابية فيها :

أ = ٢٠٠٧ ، ء = – ٢ ، الحد الأخير = ١

رتبة الحد الأخير = عدد الحدود

∴ من قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية : حـ$_{ن}$ = أ + (ن – ١) × ء نجد أن :

∴ ١ = ٢٠٠٧ – ٢ ن + ٢

⇐ ٢ ن = ٢٠٠٨ ⇐ ن = ١٠٠٤

∴ مجموع المتسلسلة = ١٠٠٤

استنتاج قوانين مجموع المتسلسلة الهندسية :

لتكن لدينا المتسلسلة : (٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢) المتسلسلة هذه حسابية وهندسية !!

هندسية لأن النسبة بين كل حدين مقداراً ثابتاً = ١ .

لإيجاد مجموعها : جـ~م~ = ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ = ٥ × ٢ = ١٠

∴ نستطيع أن نستنتج مجموع المتسلسلة الهندسية إذا كان أساسها = ر = ١ كالتالي :

جـ~م~ = م × أ ، حيث : أ : الحد الأول ، م : عدد الحدود .

الآن : إذا كانت : ر ≠ ١ فكيف نستنتج مجموع هذه المتسلسلة الهندسية ؟

نفرض أن ح~ن~ متتالية هندسية مجموع م حداً منها = جـ~م~ فإن :

جـ~م~ = أ + أ ر + أ ر^٢^ + أ ر^٣^ + ... + أ ر^م-١^ ....(١)

بضرب : (١) × ر نجد أن :

ر جـ~م~ = أ ر + أ ر^٢^ + أ ر^٣^ + أ ر^٤^ + ... + أ ر^م^ ....(٢)

بطرح : (١) − (٢) نجد أن :

جـ~م~ − ر جـ~م~ = أ − أ ر^م^

⇐ جـ~م~ (١ − ر) = أ (١ − ر^م^)

⇐ جـ~م~ = أ (١ − ر^م^) ÷ (١ − ر)

⇐ جـ~م~ = أ (ر^م^ − ١) ÷ (ر − ١)

وهو القانون العام لمجموع المتسلسلة الهندسية .

الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

سوف نرتب قوانين مجموع المتسلسلة الهندسية في النظرية التالية :

نظرية :

لتكن $\text{جـ}_{\text{م}} = \sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \text{ح}_{\text{ن}}$ حيث $\{\text{ح}_{\text{ن}}\}$ متتابعة هندسية منتهية حدها الأول = أ ، وأساسها = ر ، وعدد حدودها = م ، فإن مجموعها يُعطى بالعلاقات التالية :

$$\text{جـ}_{\text{م}} = \begin{cases} \dfrac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{م}} - ١)}{\text{ر} - ١} & \text{، ر} \neq ١ \\ \text{أ م} & \text{، ر} = ١ \end{cases}$$

مثال :

أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية : $\sum_{\text{ن}=١}^{١٠} ٢^{\text{ن}-١}$.

الحل :

$\text{جـ}_{١٠} = \sum_{\text{ن}=١}^{١٠} ٢^{\text{ن}-١} = ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ...$

واضح أن : ر = ٢ ، أ = ١ ، م = ١٠

$$\because \text{جـ}_{\text{م}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{م}} - ١)}{\text{ر} - ١}$$

$$\Leftarrow \text{جـ}_{١٠} = \frac{١ \times (٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١}$$

$$\Leftarrow \text{جـ}_{١٠} = \frac{(١٠٢٤ - ١)}{١}$$

$$\therefore \text{جـ}_{١٠} = ١٠٢٣$$

مثال :

متتابعة هندسية حدها الأول ٤ والأخير ٥١٢ فإذا كان كل حد هو ضعف الحد الذي يسبقه فأوجد مجموعها .

الحل :

المتتابعة هي : (٤ ، ٨ ، ١٦ ، .... ، ٥١٢)

واضح أن : $ر = ٢ ، أ = ٤ ، ل = ٥١٢$

من الحد العام للمتسلسلة الهندسية : $ح_م = أ \times ر^{م-١}$ ، نجد أن :

$٥١٢ = ٤ \times ٢^{م-١}$

$\Leftarrow ١٢٨ = ٢^{م-١}$

$\Leftarrow ٢^{٧} = ٢^{م-١} \Leftarrow م - ١ = ٧ \Leftarrow م = ٨$

$\therefore$ عدد الحدود = ٨

$$\because ح_م = \frac{أ\,(ر^{م} - ١)}{ر - ١}$$

$$\Leftarrow ح_٨ = \frac{٤ \times (٢^{٨} - ١)}{٢ - ١}$$

$$\Leftarrow ح_٨ = \frac{٤ \times (٢٥٦ - ١)}{١}$$

$$\therefore ح_٨ = ١٠٢٠$$

مثال :

أوجد عدد حدود المتسلسلة الهندسية حيث : $جـ_م = \sum_{ر=١}^{م} \frac{٣}{٤} \times (-٢)^{ر+١} = ١٢٩$.

الحل :

المتتابعة بعد فكها : $(٣ + (-٦) + ١٢ + ... + \frac{٣}{٤} \times (-٢)^{م+١})$

واضح أن : $ر = -٢$ ، $أ = ٣$ ، $جـ_م = ١٢٩$.

$$\because \quad جـ_م = \frac{أ(ر^م - ١)}{ر - ١}$$

$$\Leftarrow \quad ١٢٩ = \frac{٣ \times ((-٢)^م - ١)}{-٢ - ١}$$

$$\Leftarrow \quad -١٢٩ = (-٢)^م - ١$$

$$\Leftarrow \quad -١٢٨ = (-٢)^م$$

$$\Leftarrow \quad (-٢)^٧ = (-٢)^م$$

$$\Leftarrow \quad م = ٧$$

$\therefore$ عدد حدود المتسلسلة الهندسية هو سبعة حدود .

مثال :

ما نوع المتتابعة التالية ثم أوجد مجموع عشرين حد فيها :

$\text{جـ}_{\text{ن}} = (٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ....)$

الحل :

من تطبيق مفهوم المتتابعة الحسابية نجد أن الفرق بين كل حدين يساوي مقداراً ثابتاً دائمـــاً وهـــو الصفر .

كذلك إذا طبقنا مفهوم المتتابعة الهندسية نجد أن ناتج حاصل القسمة بين كل حدين يساوي دائماً مقداراً ثابتاً وهو الواحد .

∴ هذه المتتابعة حسابية و هندسية .

عند تطبيق قانون مجموع المتسلسلة الحسابية نجد أن :

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[\text{أ} + \text{ح}_{\text{ن}}\right] \Leftarrow \text{جـ}_{٢٠} = ١٠ \times \left[٣ + ٣\right] = ٦٠ .$$

عند تطبيق قانون مجموع المتسلسلة الهندسية نجد أن :

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}} = \text{ن} \times \text{أ} \Leftarrow \text{جـ}_{٢٠} = ٢٠ \times ٣ = ٦٠ .$$

مثال :

أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التي فيها :

$جـ_{٥} = \sum_{ر=١}^{٥} ح_{ر}$ ، $ح_{٣} = \frac{١}{٣}$ ، $ح_{٦} = ٩$.

الحل :

من قانون استنتاج أساس المتتابعة الهندسية إذا علم حدان فيها نجد أن :

$ر^{م-هـ} = \frac{ح_{م}}{ح_{هـ}}$ $\Leftarrow$ $ر^{٦-٣} = \frac{ح_{٦}}{ح_{٣}}$ $\Leftarrow$ $ر^{٣} = \frac{٩}{\frac{١}{٣}}$

$\Leftarrow$ $ر^{٣} = ٢٧$

$\Leftarrow$ $ر^{٣} = (٣)^{٣}$

$\therefore$ $ر = ٣$

$\because$ $ح_{٣} = أ\, ر^{٢}$ $\Leftarrow$ $\frac{١}{٣} = أ \times ٩$ $\Leftarrow$ $أ = \frac{١}{٢٧}$

$\because$ $جـ_{ن} = \frac{أ\,(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$

$\Leftarrow$ $جـ_{٥} = \frac{\frac{١}{٢٧} \times (٣^{٥} - ١)}{٣ - ١}$

$\Leftarrow$ $جـ_{٥} = \frac{\frac{١}{٢٧} \times (٢٤٣ - ١)}{٢}$

$\Leftarrow$ $جـ_{٥} = \frac{\frac{١}{٢٧} \times \cancel{٢٤٢}^{\,١٢١}}{\cancel{٢}}$

$\therefore$ $جـ_{٥} = \frac{١٢١}{٢٧}$

مثال :

أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التي فيها :

$$\sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{\text{ن}} = \frac{١٦}{١٩٥}$$

الحل :

الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

❶ إذا كانت $ج_ن$ متسلسلة هندسية مجموعها ١٢١ وأساسها ٣ فأوجد حدها الأول .

❷ أوجد عدد حدود المتسلسلة الهندسية حيث : $ج_م = \sum_{ر=١}^{م} ٢^{ر} = ٢٥٤$.

❸ باستخدام مفهوم المتتابعة الحسابية أوجد مجموع الأعداد التي تقبل القسمة على ٥ والواقعة بين العدد ٥٤ و ٦١٨ .

❹ أوجد مجموع المتتابعة الهندسية التي فيها $ح_١ = ٣$ وحدها الأخير = ٤٨ وكل حد فيها ضعف الحد السابق له .

❺ إذا كانت مبيعات إحدى الشركات في السنة المنصرمة ١٠ ملايين ريال وكانت الزيادة المتوقعة في كل سنة هي ٥% فبكم يتوقع أن تبيع الشركة في السنة الخامسة ؟ وما هو مجموع المبيعات خلال ٨ سنوات ؟

سؤال خاص للجادين :

إذا كان: لو ص = $\frac{١}{٢}$ [لو س + لو ع] ، أثبت أن :

(س ، ص ، ع) تمثل متسلسلة هندسية .

❺ إذا كانت مبيعات إحدى الشركات في السنة المنصرمة ١٠ ملايين ريال وكانت الزيادة المتوقعة في كل سنة هي ٥% فكم يتوقع أن تبيع الشركة في السنة الخامسة ؟ وما هو مجموع المبيعات خلال ٨ سنوات ؟

الحل :

قاعدة :

في مثل هذه المسائل إذا جاءت الزيادة أو النقصان بنسبة مئوية مثلاُ: هـ % فهذا يعني أن المتتابعة هندسية أساسها : ر = هـ % + ١ إذا كانت بالزيادة ، أو ر = − هـ % + ١ إذا كانت بالنقصان .

في مثالنا هذا نجد أن الزيادة ٥% ⇐ ر = $\frac{٥}{١٠٠}$ + ١ ⇐ ر = ١,٠٥

∴ ستكون المتتابعة على الصورة :

(١٠,٠٠٠,٠٠٠ ، ١٠,٥٠٠,٠٠٠ ، ١١,٠٢٥,٠٠٠ ، ......)

واضح أن : أ = ١٠^{٧}

المطلوب :

١ مبيعات الشركة في السنة الخامسة أي : ح$_{٥}$:

⇐ ح$_{٥}$ = أ × ر^{٤} ⇐ ح$_{٥}$ = ١٠^{٧} × (١,٠٥)^{٤} ⇐ ح$_{٥}$ = ١٢,١٥٥,٠٦٢.٥ .

٢ مجموع المبيعات خلال ثمان سنوات أي : جـ$_{٨}$:

⇐ جـ$_{٨}$ = $\frac{\text{أ (ر}^{٨} - ١)}{\text{(ر} - ١)}$

⇐ جـ$_{٨}$ = $\frac{١٠^{٧} \left((١,٠٥)^{٨} - ١ \right)}{(١,٠٥ - ١)}$

= $\frac{١٠^{٧} \times ٠,٤٧٧٥}{٠,٠٥}$

= ٩٥,٥٠٠,٠٠٠

تمارين إضافية على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

❶ أوجد مجموع : $١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٨} + ... + \frac{١}{٦٤}$.

❷ إذا كانت : (٣ ، هـ ، .... ، ٤ هـ + ١ ، ٢٣) تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة هـ ، ثم أوجد عدد حدود المتتابعة ، ومجموعها .

❸ كم حداً يلزم أخذه من المتسلسلة الحسابية : $٢ + ٣\frac{١}{٤} + ٤\frac{١}{٢} + ...$ ليصبح المجموع : ٢٠٤ .

❹ أوجد مجموع الأعداد المحصورة بين ١٠٠ ، و ٥٠٠ في الحالتين التاليتين :

[١] تقبل القسمة على ٥ .　　[٢] لاتقبل القسمة على ٥ .

❺ اشترى رجل سيارة بمبلغ : ١٢٠,٠٠٠ ريال ، فإذا كانت قيمة السيارة تنقص كل سنة بمعدل : ٢٠٪ أوجد قيمتها في السنة السادسة من استعمالها ؟

❻ بدأ مصنع لعصير الفواكه عمله بإنتاج ١٠٠ لتر من العصير في الأسبوع على أن يزيد الإنتاج بمعدل ٢٠٪ كل أسبوع، احسب عدد الأسابيع اللازمة حتى يصل الإنتاج إلى: ١٢,٥٠٠ لتر ثم احسب مجموع الإنتاج الكلي خلال هذه الأسابيع .

سؤال خاص للجادين :

لوحة مربعة الشكل مقسمة إلى ن من المربعات الصغيرة ، كتب في المربعات الأعداد : ١ ، ٢ ، ٤ ، ... على التوالي ، فإذا كان مجموع الأعداد في المربعات الصغيرة يساوي ٥١١ ، أوجد :

[١] عدد المربعات　　[٢] أثبت أن : $١ + جـ_{٨} = ح_{٩}$

تمارين إضافية على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

سؤال خاص للجادين :

لوحة مربعة الشكل مقسمة إلى $ن$ من المربعات الصغيرة ، كتب في المربعات الأعداد : ١ ، ٢ ، ٤ ، ... على التوالي ، فإذا كان مجموع الأعداد في المربعات الصغيرة يساوي ٥١١ ، أوجد :

[١] عدد المربعات   [٢] أثبت أن : $١ + ج_٨ = ح_٩$

الحل :

الأعداد المكتوبة على في المربعات على التوالي : ١ ، ٢ ، ٤ ، ...

وهي تمثل متتابعة هندسية فيها : $أ = ١$ ، $ر = ٢$.

$\because$ مجموع الأعداد المكتوبة $= ٥١١ \Leftarrow ج_ن = ٥١١$.

الآن : [١] عدد المربعات :

عدد المربعات = عدد الحدود المكتوبة والتي تمثل متتابعة هندسية مجموعها $ج_ن = ٥١١$.

من مجموع المتسلسلة الهندسية : $ج_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$

$$\Leftarrow ٥١١ = \frac{١ \times (٢^ن - ١)}{٢ - ١} \Leftarrow ٥١١ = ٢^ن - ١$$

$$\Leftarrow ٥١٢ = ٢^ن \Leftarrow (٢)^٩ = (٢)^ن \Leftarrow ن = ٩$$

$\Leftarrow$ عدد المربعات = ٩

[٢] أثبت أن : $١ + ج_٨ = ح_٩$

$$ج_٨ = \frac{أ(ر^٨ - ١)}{ر - ١} \Leftarrow ج_٨ = ٢^٨ - ١ \Leftarrow ١ + ج_٨ = ٢٥٦ \quad ....(١)$$

$$ح_٩ = أ \times ر^٨ \Leftarrow ح_٩ = ر^٨ \Leftarrow ح_٩ = ٢^٨ = ٢٥٦ \quad ....(٢)$$

من (١) و (٢) نجد أن : $١ + ج_٨ = ح_٩$

الدرس السابع : نهاية المتتابعة الغير منتهية

مثال تمهيدي :

ادرس سلوك الحد النوني في $\{أ_ن\}_{ن=1}^{\infty}$ ، حيث : $أ_ن = \frac{ن}{ن+1}$

∵ المتتابعة $\{أ_ن\}_{ن=1}^{\infty}$ لايمكن كتابة كل حدودها ولكن نأخذ فكرة عن سلوكها عند قيم ن الكبيرة .

حدودها الأولى :

$\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{5}{6}$ ، ....

$ح_{100} = \frac{100}{101}$ ، .... ، وكذلك $ح_{1000} = \frac{1000}{1001}$ ، ...... ، وهكذا .

ونلاحظ أن المتتابعة تقترب من العدد **واحد** كلما زادت قيمة **ن** . لذلك نتوقع أن تكون

نهاية المتتابعة هي الواحد الصحيح .

(أي أن المتتابعة متقاربة ونهايتها العدد واحد) ، ونكتب : $\lim_{ن \to \infty} أ_ن = 1$

الدرس السابع : نهاية المتتابعة الغير منتهية

مثال آخر :

اكتب الحدود الأولى للمتتابعة المعطاة ثم توقع نهايتها إن وجدت :

$\{أ_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ ، حيث : $أ_ن = \frac{٢ن}{٤ن + ١}$

الحل :

$أ_ن = (\frac{٢}{٥} ، \frac{٤}{٩} ، \frac{٦}{١٣} ، \frac{٨}{١٧} ، .... ،)$

$ح_{١٠٠} = \frac{٢٠٠}{٤٠١}$ ، .... ، وكذلك $ح_{١٠٠٠} = \frac{٢٠٠٠}{٤٠٠١}$

وهكذا نلاحظ أن المتتابعة تقترب من العدد $\frac{١}{٢}$ كلما زادت قيمة ن لذلك نتوقع أن

تكون نهاية المتتابعة هي $\frac{١}{٢}$ ⇐ المتتابعة تقاربية ، ونكتب : $\underset{ن \to \infty}{نهــا} أ_ن = \frac{١}{٢}$

الدرس السابع : نهاية المتتابعة الغير منتهية

تعريف :

إذا كانت $\{أ_ن\}$ متتابعة غير منتهية وكان : ل عدداً حقيقياً بحيث إن المقدار : $|أ_ن - ل|$ يساوي الصفر أو يقترب أكثر فأكثر من الصفر كلما زادت ن بلا حدود عندئذ نقول إن المتتابعة : $\{أ_ن\}$ متقاربة ولها النهاية ل عندما تؤول ن إلى المالانهاية ونكتب :

$$\lim_{ن \to \infty} أ_ن = ل$$

ملاحظات :

❶ هذا التعريف يستخدم للتحقق من أن عدداً حقيقياً ما هو نهاية المتتابعة ولا يستخدم لإيجاد نهاية المتتابعة .

❷ إذا لم يتحقق الشرط $|أ_ن - ل|$ يساوي الصفر أو يقترب من الصفر كلما زادت ن فإن المتتابعة ليست متقاربة .

❸ إن المتتابعة المتقاربة لها نهاية وحيدة .

مثال :

تحقق باستخدام التعريف من المتتابعة $\{أ_ن\}$ حيث : $أ_ن = ٣ - \frac{٢}{ن}$ لها النهاية ٣ .

الحل : لاحظ أن : ل = ٣

$|أ_ن - ل| = |٣ - \frac{٢}{ن} - ٣| = |-\frac{٢}{ن}| = \frac{٢}{ن}$ ، وهذا المقدار يقترب من الصفر كلما زادت قيم ن بلا حدود .

$$\therefore \lim_{ن \to \infty} أ_ن = ٣$$

الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

تعريف :

نقول أن المتتابعة $\{أ_ن\}_{ن=1}^{\infty}$ الغير منتهية:

(أ) متقاربة (تقاربية) إذا كانت لها نهاية (النهاية موجودة) .

(ب) متباعدة (تباعدية) إذا كانت ليس لها نهاية (النهاية غير موجودة) .

نظريات لدراسة نهاية المتتابعات غير المنتهية :

١ المتتابعة $\{أ_ن\}$ والتي فيها $أ_ن = جـ$ ، حيث جـ ثابت لجميع قيم ن متقاربة ونهايتها تساوي العدد الثابت نفسه . ونكتب : $\lim_{ن \to \infty} أ_ن = جـ$

٢ $\lim_{ن \to \infty} \frac{1}{ن} =$ صفر

٣ $\lim_{ن \to \infty} \left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \begin{cases} \text{صفر} & ، أ < ب \\ \infty & ، أ > ب \end{cases}$

٤ إذا كانت: $\lim_{ن \to \infty} أ_ن = ل$ ، $\lim_{ن \to \infty} ب_ن = ك$ ، فإن :

[أ] $\lim_{ن \to \infty} (أ_ن \pm ب_ن) = ل \pm ك$

[ب] $\lim_{ن \to \infty} (أ_ن \times ب_ن) = ل \times ك$

[جـ] $\lim_{ن \to \infty} (أ_ن \div ب_ن) = ل \div ك$ ، $ب_ن \neq 0$ ، $ك \neq 0$.

الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة : $\text{أ}_{\text{ن}} = \frac{٥\text{ن} - ١}{٣\text{ن} + ٣}$

الحل :

$$\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{أ}_{\text{ن}} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{ن} - ١}{٣\text{ن} + ٣}$$

$$= \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{ن}\left(٥ - \frac{١}{\text{ن}}\right)}{\text{ن}\left(٣ + \frac{٣}{\text{ن}}\right)}$$

بأخذ ن عامل مشترك

$$= \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\text{ن}}\left(٥ - \frac{١}{\text{ن}}\right)}{\cancel{\text{ن}}\left(٣ + \frac{٣}{\text{ن}}\right)}$$

اختصار ن

$$= \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\left(٥ - \cancel{\frac{١}{\text{ن}}}\right)}{\left(٣ + \cancel{\frac{٣}{\text{ن}}}\right)}$$

صــفر ، صــفر

$\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{عدد}}{\text{ن}}$ صــفر

$$= \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥}{٣} = \frac{٥}{٣}$$

الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة : $أ_ن = \frac{٢ن^٣ - ن}{ن^٢ + ٤}$

الحل :

$$\underset{ن \leftarrow \infty}{نهــا} أ_ن = \underset{ن \leftarrow \infty}{نهــا} \frac{٢ن^٣ - ن}{ن^٢ + ٤}$$

$$= \underset{ن \leftarrow \infty}{نهــا} \frac{ن^٢ \left(٢ن - \frac{١}{ن}\right)}{ن^٢ \left(١ + \frac{٤}{ن^٢}\right)}$$

$$= \underset{ن \leftarrow \infty}{نهــا} \frac{\cancel{ن^٢} \left(٢ن - \frac{١}{ن}\right)}{\cancel{ن^٢} \left(١ + \frac{٤}{ن^٢}\right)}$$

$$= \underset{ن \leftarrow \infty}{نهــا} \frac{\left(٢ن - \cancel{\frac{١}{ن}}^{\text{صفر}}\right)}{\left(١ + \cancel{\frac{٤}{ن^٢}}^{\text{صفر}}\right)}$$

$$= \underset{ن \leftarrow \infty}{نهــا} ٢ن = \infty$$

ملاحظة :

$$\underset{ن \leftarrow \infty}{نهــا} ن = \infty$$

الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة : $أ_ن = \frac{ن^2 - ن + 6}{ن^3 + 9ن^2}$

الحل :

$$\lim_{ن \to \infty} أ_ن = \lim_{ن \to \infty} \frac{ن^2 - ن + 6}{ن^3 + 9ن^2}$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \frac{ن^3 \left(\frac{1}{ن} - \frac{1}{ن^2} + \frac{6}{ن^3} \right)}{ن^3 \left(1 + \frac{9}{ن} \right)}$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \frac{\cancel{ن^3} \left(\frac{1}{ن} - \frac{1}{ن^2} + \frac{6}{ن^3} \right)}{\cancel{ن^3} \left(1 + \frac{9}{ن} \right)}$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \frac{\left(\underbrace{\cancel{\frac{1}{ن}}}_{\text{صفر}} - \underbrace{\cancel{\frac{1}{ن^2}}}_{\text{صفر}} + \underbrace{\cancel{\frac{6}{ن^3}}}_{\text{صفر}} \right)}{\left(1 + \underbrace{\cancel{\frac{9}{ن}}}_{\text{صفر}} \right)}$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \frac{\text{صفر}}{1} = \text{صفر}$$

الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

ملاحظة :

في مثل المسائل السابقة لاستنتاج نهاية المتتابعة إذا كانت كسرية بسطها كثيرة حدود ومقامها كثيرة حدود فإننا نأخذ $ن$ بأكبر درجة من المقام عامل في البسط والمقام أو نقسم البسط والمقام على $ن$ بأكبر درجة موجودة في المقام مع الاستفادة من النظريتين التاليتين :

(أ) $\lim\limits_{ن \to \infty} \frac{\text{عدد}}{ن} = \text{صفر}$ (ب) $\lim\limits_{ن \to \infty} أ ن + حـ = \infty$

ويمكن الاستفادة من النظرية التالية لحل مثل هذه المسائل :

في المتتابعة الكسرية التي بسطها ومقامها كثيرة حدود فإن نهايتها لاتخرج عن الحالات التالية :

(أ) إذا كانت درجة البسط = درجة المقام فإن : $\lim\limits_{ن \to \infty} أ_ن = \frac{\text{معامل } ن \text{ بأكبر درجة في البسط}}{\text{معامل } ن \text{ بأكبر درجة في المقام}}$

(ب) إذا كانت درجة البسط < درجة المقام فإن : $\lim\limits_{ن \to \infty} أ_ن = \text{صفر}$

(ج) إذا كانت درجة البسط > درجة المقام فإن : $\lim\limits_{ن \to \infty} أ_ن = \infty$

الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

أمثلة إضافية :

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة : $أ_ن = \frac{٧ن^٢ - ن + ١٢}{٥ن^٢ + ٦ن}$

الحل :

$$\lim_{ن \to \infty} أ_ن = \lim_{ن \to \infty} \frac{٧ن^٢ - ن + ١٢}{٥ن^٢ + ٦ن} = \frac{٧}{٥}$$

لأن درجة البسط = درجة المقام

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة : $أ_ن = \frac{٤ن^٦ - ن}{٢ن^٢ + ٣ن}$

الحل :

$$\lim_{ن \to \infty} أ_ن = \lim_{ن \to \infty} \frac{٤ن^٦ - ن}{٢ن^٢ + ٣ن} = \infty$$

لأن درجة البسط > درجة المقام

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة : $أ_ن = \frac{ن^٤ - ٢ن^٣}{٢ن^٧ + ٨ن^٢}$

الحل :

$$\lim_{ن \to \infty} أ_ن = \lim_{ن \to \infty} \frac{ن^٤ - ٢ن^٣}{٢ن^٧ + ٨ن^٢} = \text{صفر}$$

لأن درجة البسط < درجة المقام

الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

أوجد : $\lim_{ن \to \infty}$ أ$_ن$ ، حيث : أ$_ن$ = ٧

الحل :

$\lim_{ن \to \infty}$ أ$_ن$ = $\lim_{ن \to \infty}$ ٧ = ٧

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة : أ$_ن$ = $\frac{٥}{٣ن + ٨}$

الحل :

$\lim_{ن \to \infty}$ أ$_ن$ = $\lim_{ن \to \infty} \frac{٥}{٣ن + ٨}$ = صفر

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة : أ$_ن$ = $\left(\frac{٥}{٨}\right)^{ن}$

الحل :

$\lim_{ن \to \infty}$ أ$_ن$ = $\lim_{ن \to \infty} \left(\frac{٥}{٨}\right)^{ن}$ = صفر

تذكر أن :

الدالة الأسية على الصورة : $\frac{أ}{ب}$ إذا كانت : أ < ب ، فإن نهايتها = صفر

وإذا كان : أ > ب ، فإن نهايتها = ∞

الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة : $أ_ن = \dfrac{٣ \times ٧^{ن+١} + ٥ \times ٩^{ن}}{٢ \times ٧^{ن} - ٤ \times ٩^{ن+١}}$

الحل :

ملاحظة :

في مثل هذه المسائل لإيجاد النهاية نقسم كل حد في البسط والمقام علـــى أكـــبر أساس مرفوع للأس ن .

$$\underset{ن \to \infty}{نها} أ_ن = \underset{ن \to \infty}{نها} \dfrac{٣ \times ٧^{ن+١} + ٥ \times ٩^{ن}}{٢ \times ٧^{ن} - ٤ \times ٩^{ن+١}}$$

$$= \underset{ن \to \infty}{نها} \dfrac{٣ \times ٧ \times ٧^{ن} + ٥ \times ٩^{ن}}{٢ \times ٧^{ن} - ٤ \times ٩ \times ٩^{ن}}$$

لاحظ : $٩^{ن+١} = ٩ \times ٩^{ن}$

$$= \underset{ن \to \infty}{نها} \dfrac{٢١ \times ٧^{ن} + ٥ \times ٩^{ن}}{٢ \times ٧^{ن} - ٣٦ \times ٩^{ن}}$$

$$= \underset{ن \to \infty}{نها} \dfrac{٢١ \times \left(\dfrac{٧}{٩}\right)^{ن} + ٥ \times \left(\dfrac{٩}{٩}\right)^{ن}}{٢ \times \left(\dfrac{٧}{٩}\right)^{ن} - ٣٦ \times \left(\dfrac{٩}{٩}\right)^{ن}}$$

(صفر ، =١ ، صفر ، =١)

$\therefore \underset{ن \to \infty}{نها} \dfrac{٥}{-٣٦} = -\dfrac{٥}{٣٦}$ $\therefore$ المتتابعة تقاربية

الدالة الأسية على الصورة : $\dfrac{أ}{ب}$ إذا كانت : $أ < ب$ ، فإن نهايتها = صفر ،

وإذا كان : $أ > ب$ ، فإن نهايتها = ∞ .

الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

أوجد $\lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \text{أ}_{\text{ن}}$ ، حيث : $\text{أ}_{\text{ن}} = \sqrt{\text{ن}^{٢} + ١} - \text{ن}$

وادرس تقاربها .

الحل :

ملاحظة : المتتابعة الجذرية نضرب البسط والمقام في مرافق الجذر .

$$\text{أ}_{\text{ن}} = \sqrt{\text{ن}^{٢} + ١} - \text{ن}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{ن}^{٢} + ١} - \text{ن}}{١} \times \frac{\sqrt{\text{ن}^{٢} + ١} + \text{ن}}{\sqrt{\text{ن}^{٢} + ١} + \text{ن}}$$

$$= \frac{\text{ن}^{٢} + ١ - \text{ن}^{٢}}{\sqrt{\text{ن}^{٢} + ١} + \text{ن}} = \frac{١}{\sqrt{\text{ن}^{٢} + ١} + \text{ن}}$$

$$\therefore \text{أ}_{\text{ن}} = \frac{١}{\sqrt{\text{ن}^{٢} + ١} + \text{ن}}$$

$$\Leftarrow \lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \text{أ}_{\text{ن}} = \text{صفر}$$

∴ المتتابعة تقاربية

الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة وأوجد نهايتها : $\text{أ}_{\text{ن}} = (-١)^{\text{ن}}$

الحل :

$$\text{أ}_{\text{ن}} = (-١)^{\text{ن}} = \left(-١ ، ١ ، -١ ، ١ ، ....\right)$$

واضح أن المتتابعة تأخذ القيمتين : ١ ، −١ بالتناوب ولا تثبت على أحدهما .

⇐ المتتابعة تباعدية وليس لها نهاية .

لاحظ : أن شرط التقارب أن تكون النهاية وحيدة .

أخيراً هذي خواص العدد ∞ :

١ $\dfrac{\text{أي عدد}}{\infty} = \text{صفر}$

٢ $\dfrac{\text{أي عدد}}{\text{صفر}} = \infty$ أو غير معرف

٣ $\dfrac{\infty}{\text{أي عدد}} = \infty$

٤ أي عدد $\pm \infty = \pm \infty$

٥ عدد موجب $\times \pm \infty = \pm \infty$

٦ عدد سالب $\times \pm \infty = \mp \infty$

٧ $\sqrt{\infty} = \infty$

تمارين على الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

ادرس تقارب المتتابعات التالية وأوجد نهايتها:

[١] $\text{أ}_{\text{ن}} = \dfrac{-٥ \times ٢^{\text{ن}+٢} + ٧^{\text{ن}+١}}{٣ \times ٢^{\text{ن}+١} - ٤ \times ٧^{\text{ن}}}$

[٢] $\text{أ}_{\text{ن}} = \dfrac{٤\text{ن}^{٣} + \text{ن}^{٢} - ٢٣}{-٧\text{ن}^{٣} + \text{ن}}$

[٣] $\text{أ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{ن}^{٥} + \text{ن}^{٢} + ٨}{-٢\text{ن}^{٣} + \text{ن}^{٤}}$

[٤] $\text{أ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{ن}^{٢} + \text{ن}}{٢\text{ن} + ٩}$

[٥] $\text{أ}_{\text{ن}} = \sqrt{٢\text{ن} + ١} - \sqrt{٢\text{ن}}$

مسائل للجادين :

١ ادرس تقارب المتتابعة $\text{أ}_{\text{ن}} = \dfrac{١ + ٥ + ٩ + \ldots\ldots + (٤\text{ن} - ٣)}{٥ + ٨ + ١١ + \ldots\ldots + (٣\text{ن} + ٢)}$

٢ ادرس تقارب المتتابعة : $\text{أ}_{\text{ن}} = (٠,٤ ، ٠,٠٤ ، ٠,٠٠٤ ، \ldots\ldots\ldots\ldots)$

حل : تمارين على الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مسائل للجادين :

١ ادرس تقارب المتتابعة $أ_ن = \dfrac{١ + ٥ + ٩ + ...+ (٤ن - ٣)}{٥ + ٨ + ١١ + ... + (٣ن + ٢)}$

الحل :

نلاحظ أن البسط : $١ + ٥ + ٩ + ...+ (٤ن - ٣)$

يمثل متسلسلة حسابية الحد العام لها : $ح_ن = (٤ن - ٣)$

كذلك نلاحظ أن المقام : $٥ + ٨ + ١١ + ... + (ن + ١)$

يمثل متسلسلة حسابية الحد العام لها : $ح_ن = (٣ن + ٢)$

$∴ أ_ن = \dfrac{٤ن - ٣}{٣ن + ٢}$

$\Leftarrow \lim_{ن \to \infty} أ_ن = \lim_{ن \to \infty} \dfrac{٤ن - ٣}{٣ن + ٢} = \dfrac{٤}{٣}$

لأن درجة البسط = درجة المقام

$\Leftarrow$ المتتابعة تقاربية .

حل : تمارين على الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مسائل للجادين :

[٢] ادرس تقارب المتتابعة : $\{ا_ن\} = ($ ٠,٤ ، ٠,٠٤ ، ٠,٠٠٤ ، .... $)$

الحل :

المتتابعة على الصورة : $\{ا_ن\} = \left(\frac{٤}{١٠} ، \frac{٤}{١٠٠} ، \frac{٤}{١٠٠٠} ، ...... \right)$

وهي تمثل متتابعة هندسية : ا = ٠,٤ ، ر = ٠,١

من الحد العام نجد أن :

$$ا_ن = \frac{٤}{١٠} \times \left(\frac{١}{١٠}\right)^{ن-١}$$

$$\Leftarrow \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} ا_ن = \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤}{١٠} \times \left(\frac{١}{١٠}\right)^{ن-١} = \text{صفر}$$

بالاستفادة من النظريات في صفحة (٨٢)

∴ المتتابعة تقاربية .

الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

تعريف :

إذا كانت $\{ أ_ن \}$ متتابعة غير منتهية فإن الصيغة :

$$ج = \sum_{ن=1}^{\infty} أ_ن = أ_1 + أ_2 + أ_3 + أ_4 + \dots\dots\dots\dots + أ_ن + \dots\dots\dots\dots$$

تسمى متسلسلة غير منتهية .

إذا كان لدينا المتتابعة : $\{أ_ن\}$ حيث : $أ_ن = \frac{1}{3^ن}$ فما هي المتسلسلة غير المنتهيـــة ج

والتي حدودها هي : $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ، ...... ؟

الحل :

لدينا : $أ_1 = \frac{1}{3}$ ، $أ_2 = \frac{1}{9}$ ، $أ_3 = \frac{1}{27}$ ، $أ_4 = \frac{1}{81}$ ، ....

$\therefore$ $ج = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ ، .... أو $ج = \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{1}{3^ن}$

ملاحظات :

1. المتسلسلة اللانهائية هي كالمتتابعة اللانهائية في كونها ليس لها حد أخير .
2. المتسلسلة اللانهائية قد تكون حسابية أو هندسية أو لاحسابية ولا هندسية .

الآن :

يتبادر إلى الذهن سؤال هل المتسلسلة اللانهائية لها مجموع وكيف نوجده ؟

والإجابة على هذا السؤال : يعتمد على نوع المتسلسلة ، وطبيغة عناصـــرها حيـــث في بعض الأحيان نستطيع أن نوجد مجموع المتسلسلة اللانهائية بينما في بعض الأحيان يكـــون الأمـــر مستحيلاً ، وكيف نحدد ذلك هذا ما سندرسه في الخطوات القادمة .

الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

أولاً : المتسلسلة الحسابية غير المنتهية :

إذا كانت المتسلسلة غير المنتهية حسابية فهي متباعدة وليس لها مجموع .

تذكر أن : المتسلسلة الحسابية هي متسلسلة من الدرجة الأولى على الصورة : (جـ ن + هـ) ومعامل ن هو أساس المتتابعة الحسابية .

مثال :

أوجد إن أمكن : جـ $= \sum_{ن=١}^{\infty}$ (٢ ن + ١) .

الحل :

جـ $= \sum_{ن=١}^{\infty}$ (٢ ن + ١) = (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ......)

واضح أن المتتابعة حسابية لانهائية .

⇐ متباعدة وليس لها مجموع .

∴ المتسلسلة يستحيل إيجاد مجموعها .

الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

ثانياً : المتسلسلة الهندسية غير المنتهية :

إذا كانت المتسلسلة غير المنتهية هندسية فلها حالتان :

(أ) إذا كانت $|ر| < ١$ ، فإن المتسلسلة تكون تقاربية و مجموعها $ج = \frac{أ}{١ - ر}$.

(ب) إذا كانت $|ر| \geqslant ١$ ، فإن المتسلسلة تكون تباعدية وليس لها مجموع .

تعريف :

ليكن لدينا المتسلسلة $ج = \sum_{ن=١}^{\infty} أ \times ر^{ن-١}$ ، حيــث أ ، ر ثابتــان عندئــذ : نســمي ج متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الأول = أ ، وأساسها = ر .

لاتنسى أن :

المتسلسلة الهندسية دالة أسية فما عليــك إلا أن تضــعها علــى الصــورة : $أ \times ر^{ن-١}$ لكي تحدد الأساس والحد الأول .

من خصائص الأسس :

❶ $أ^{ن} = أ \times أ^{ن-١}$

❷ $أ^{٥} = أ^{٣} \times أ^{٢}$

❸ $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{ن}$

الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

مثال :

حدد نوع المتسلسلة وأوجد أساسها وحدها الأول :

① ج $= \sum_{ر=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{ر}$ ② ج $= \sum_{ر=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{ر-1}$ ③ ج $= \sum_{ر=}^{\infty} 4^{-ر}$.

الحل :

① ج $= \sum_{ر=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{ر} = \sum_{ر=1}^{\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{ر-1}$

وهي صورة متسلسلة هندسية لانهائية حدها الأول = أ $= \frac{1}{2}$ ، وأساسها = ر $= \frac{1}{2}$

② ج $= \sum_{ر=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{ر-1}$

وهي صورة متسلسلة هندسية لانهائية حدها الأول = أ = ٢ ، وأساسها = ر $= \frac{1}{5}$

③ ج $= \sum_{ر=}^{\infty} 4^{-ر} = \sum_{ر=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{ر} = \sum_{ر=1}^{\infty} \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{ر-1}$

وهي صورة متسلسلة هندسية لانهائية حدها الأول = أ $= \frac{1}{4}$ ، وأساسها = ر $= \frac{1}{4}$

الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

مثال :

ادرس تقارب المتسلسلة الهندسية التالية وأوجد المجموع إن أمكن :

$$جـ = \sum_{ن=1}^{\infty} ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$$

الحل :

① $جـ = \sum_{ن=1}^{\infty} ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$

نضعها على الصورة : $أ \times ر^{ن-١}$

$$\Leftarrow جـ = \sum_{ن=1}^{\infty} ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن} = \sum_{ن=1}^{\infty} ٣ \times \frac{١}{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١} = \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{٣}{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١}$$

$$\Leftarrow ر = \frac{١}{٢} \Leftarrow |ر| = \left|\frac{١}{٢}\right| < ١$$

$\therefore$ المتسلسلة الهندسية تقاربية ولها مجموع ، $أ = \frac{٣}{٢}$

$$\because جـ = \frac{أ}{١ - ر}$$

$$\Leftarrow جـ = \frac{\frac{٣}{٢}}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{\frac{٣}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٣$$

الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

مثال :

ادرس تقارب المتسلسلات الهندسية التالية وأوجد المجموع إن أمكن :

① $جـ = \sum_{ن=1}^{\infty} ٥^{ن}$ ② $جـ = \sum_{ن=1}^{\infty} \left(-\frac{١}{٣}\right)^{ن+١}$

الحل :

① $حـ = \sum_{ن=1}^{\infty} ٥^{ن} = \sum_{ن=1}^{\infty} ٥ \times ٥^{ن-١}$

المتسلسلة الآن على الصورة العامة وأساسها : $ر = ٥ > ١$

∴ المتسلسلة الهندسية تباعدية وليس لها مجموع .

②

$$حـ = \sum_{ن=1}^{\infty} \left(-\frac{١}{٣}\right)^{ن+١} = \sum_{ن=1}^{\infty} \left(-\frac{١}{٣}\right)\times\left(-\frac{١}{٣}\right)^{ن} = \sum_{ن=1}^{\infty} \left(-\frac{١}{٣}\right)\times\left(-\frac{١}{٣}\right)\times\left(-\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$$

$$= \sum_{ن=1}^{\infty} \left(-\frac{١}{٩}\right)\times\left(-\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$$

$أ = -\frac{١}{٩}$ ، $ر = -\frac{١}{٣} \Leftarrow |ر| < ١$ ∴ تقاربية ولها مجموع .

$$حـ = \frac{-\frac{١}{٩}}{١-\left(-\frac{١}{٣}\right)} = \frac{-\frac{١}{٩}}{١+\frac{١}{٣}} = \frac{-\frac{١}{٩}}{\frac{٤}{٣}} = \frac{-\frac{١}{٣}}{٤} = -\frac{١}{١٢}$$

تطبيقات على درس : نهاية المتسلسلة غير منتهية

❶ ادرس تقارب المتسلسلات الهندسية التالية وأوجد المجموع إن أمكن :

① جـ = $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٢} \times \left(\frac{٥}{٧}\right)^{ن}$ ② $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن}$ ③ $\sum_{ن=١}^{\infty} ٢ \times ٣^{١-ن}$

❷ متتابعة هندسية غير منتهية كل حد من حدودها سبعة أمثال مجموع الحدود التالية له ، فإذا كان : $ح_{٣} = \frac{٣}{٨}$ ، فأوجد هذه المتتابعة ، وأوجد مجموعها إن أمكن .

❸ اكتب المجموع التالي : (٠,٧ + ٠,٠٧ ، ٠,٠٠٧ ، ٠,٠٠٠٧ ، ...)
على صورة : $\frac{أ}{ب}$

❹ إذا كان مجموع الحدين الأول والثاني من متسلسلة هندسية لانهائية يساوي : $\frac{٣}{٨}$ ، وكان مجموعها يساوي $\frac{١}{٢}$ أوجد كلاً من :

① أساس المتسلسلة ② الحد الأول .

❷ متتابعة هندسية غير منتهية كل حد من حدودها سبعة أمثال مجموع الحدود التالية له ، فإذا كان : $ح_٣ = \frac{٣}{٨}$ ، فأوجد هذه المتتابعة ، وأوجد مجموعها إن أمكن .

الحل :

∵ كل حد من حدود المتتابعة الهندسية سبعة أمثال مجموع الحدود التالية له .

$⇐$ أ = ٧ × (أ ر + أ ر٢ + أ ر٣ + ...) = ٧ جـ

$⇐$ أ = ٧ جـ ....(١)

حيث : جـ = (أ ر + أ ر٢ + أ ر٣ + ...)

نعلم أن $ح = \frac{\text{الحد الأول}}{١ - ر}$ $⇐$ $ح = \frac{أ ر}{١ - ر}$ ....(٢)

بالتعويض من (١) في (٢) نجد أن :

$$أ = ٧ \times \frac{أ ر}{١ - ر} = \frac{٧ أ ر}{١ - ر}$$

$$⇐ أ (١ - ر) = ٧ أ ر ⇐ ١ - ر = ٧ ر$$

$$⇐ ١ = ٨ ر$$

$$⇐ ر = \frac{١}{٨}$$

الآن : ∵ $ح_٣ = \frac{٣}{٨}$ $⇐$ $أ ر^٢ = \frac{٣}{٨}$ $⇐$ $أ \left(\frac{١}{٨}\right)^٢ = \frac{٣}{٨}$ $⇐$ أ = ٢٤

∴ المتتابعة : (٢٤ ، ٣ ، $\frac{٣}{٨}$ ، ....)

الآن :

∵ $|ر| = \left|\frac{١}{٨}\right| < ١$ $⇐$ تقاربية ولها مجموع

$$ح = \frac{٢٤}{١ - \frac{١}{٨}} = \frac{١٩٢}{٧}$$

❸ اكتب المجموع التالي : (٠,٧ + ٠,٠٧ ، ٠,٠٠٧ ، ٠,٠٠٠٧ ، ...)
على صورة : $\frac{أ}{ب}$

الحل :

المجموع : (٠,٧ + ٠,٠٧ ، ٠,٠٠٧ ، ٠,٠٠٠٧ ، ...)

يمثل متسلسلة هندسية فيها : $أ = \frac{٧}{١٠}$ ، $ر = \frac{١}{١٠}$

$\because ح = \frac{أ}{١ - ر}$

$\Leftarrow ح = \frac{\frac{٧}{١٠}}{١ - \frac{١}{١٠}} = \frac{٧}{٩}$

$\therefore$ (٠,٧ + ٠,٠٧ ، ٠,٠٠٧ ، ٠,٠٠٠٧ ، ...) = $\frac{٧}{٩}$

تطبيقات على درس : نهاية المتسلسلة غير منتهية

❹ إذا كان مجموع الحدين الأول والثاني من متسلسلة هندسية لانهائية يســـاوي : $\frac{٣}{٨}$

، وكان مجموعها يساوي $\frac{١}{٢}$ أوجد كلاً من :

① أساس المتسلسلة ② الحد الأول .

الحل :

∵ مجموع الحدين الأول والثاني من متسلسلة هندسية لانهائية يساوي : $\frac{٣}{٨}$

$\Leftarrow \text{أ} + \text{أ}\text{ر} = \frac{٣}{٨}$

$\Leftarrow \text{أ}(١ + \text{ر}) = \frac{٣}{٨} \Leftarrow ١ + \text{ر} = \frac{٣}{٨\text{أ}} \Leftarrow \text{ر} = \frac{٣}{٨\text{أ}} - ١$ ....(١)

∵ مجموع المتسلسلة = $\frac{١}{٢}$

$\Leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}} \Leftarrow ١ - \text{ر} = ٢\text{أ} \Leftarrow \text{ر} = ١ - ٢\text{أ}$ ....(٢)

بمساواة : (١) و (٢) نجد أن :

$$\frac{٣}{٨\text{أ}} - ١ = ١ - ٢\text{أ}$$

$\Leftarrow \frac{٣}{٨\text{أ}} + ٢\text{أ} = ٢ \Leftarrow ٣ + ١٦\text{أ}^{٢} = ١٦\text{أ} \Leftarrow ١٦\text{أ}^{٢} - ١٦\text{أ} + ٣ = ٠$

بحل المعادلة سنجد قيمتين لـــ أ هي : $\text{أ} = \frac{٣}{٤}$ ، $\text{أ} = \frac{١}{٤}$.

و وعندها سنجد قيمتين : $\text{ر} = -\frac{١}{٢}$ ، $\text{ر} = \frac{١}{٢}$

الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

نتابع استكمال الدرس بدراسة الحالات الباقية ونذكّر أننا درسنا حالتين الأولى إذا كانت المتسلسلة حسابية وقلنا أنها دائماً تباعدية وليس لها مجموع ، كذلك درسنا الحالة الثانية المتسلسلة الهندسية وقلنا أن لها حالتين تتحدد بأساس المتسلسلة .

الآن : إذا كانت المتسلسلة لاحسابية ولاهندسية فنلجأ إلى اختبار التباعد ولكن أولاً سنعطي النظرية التالية :

نظرية :

إذا كانت المتسلسلة: $\text{ح} = \sum_{\text{ر}=1}^{\infty} \text{أ}_{\text{ر}}$ متقاربة ، فإن : $\lim_{\text{ر} \to \infty} \text{أ}_{\text{ر}} = \text{صفراً}$

ومن النظرية نستطيع أن نستنتج نصاً لاختبار التباعد كالتالي :

ثالثاً : اختبار التباعد وينص على الآتي :

{ إذا كانت $\lim_{\text{ر} \to \infty} \text{أ}_{\text{ر}} \neq \text{صفراً}$ أو (غير موجودة) فإن : $\text{ج} = \sum_{\text{ر}=1}^{\infty} \text{أ}_{\text{ر}}$ تباعدية }

بصورة نصية :

(إذا كانت نهاية المتتابعة لا تساوي الصفر فإن المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع)

ملاحظة هامة :

عكس النظرية ليس من الضروري صحته أي أنه قد تكون : $\lim_{\text{ر} \to \infty} \text{أ}_{\text{ر}} = \text{الصفر}$ ،

ومع ذلك : $\text{ج} = \sum_{\text{ر}=1}^{\infty} \text{أ}_{\text{ر}}$ متباعدة .

فائدة :

نستخدم اختبار التباعد مباشرة إذا كان السؤال لمتسلسلة كسرية .

الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

مثال :

أثبت أن المتسلسلة جـ = $\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{ن}{ن+1}$ متباعدة .

الحل :

∵ المتسلسلة كسرية نلجأ إلى اختبار التباعد .

لاتنسى :

أننا في اختبار التباعد ندرس نهاية المتتابعة ومن ثم نستنتج تقارب أو تباعد مجموعها أي المتسلسلة .

الآن :

$\lim_{ن \to \infty} \frac{ن}{ن+1} = 1$ ⇐ النهاية لاتساوي الصفر .

∴ المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع .

مثال :

ادرس تقارب المتسلسلة غير المنتهية التالية : حـ = $\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{3ن^2+1}{8ن^2-1}$

الحل :

$\lim_{ن \to \infty} \frac{3ن^2+1}{8ن^2-1} = \frac{3}{8}$

∵ نهايتة المتتابعة لاتساوي الصفر ⇐ المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع .

مثال :

أثبت أن المتسلسلة : $ح = \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٣^ن + ٥^ن}{٥^{ن+١}}$ متباعدة .

الحل :

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{٣^ن + ٥^ن}{٥^{ن+١}} = \lim_{ن \to \infty} \left(\frac{٣^ن}{٥^{ن+١}} + \frac{٥^ن}{٥^{ن+١}} \right)$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \left(\frac{١}{٥} \times \left(\frac{٣^ن}{٥^ن} \right)_{(صفر)} + \frac{١}{٥} \times \left(\frac{٥^ن}{٥^ن} \right)_{(١)} \right)$$

$$= \frac{١}{٥}$$

∵ نهاية المتتابعة لاتساوي الصفر ⇐ المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع .

مثال :

أثبت أن المتسلسلة : $ح = \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{ن}$ متباعدة .

الحل :

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{١}{ن} = \text{صفراً}$$

في مثل هذه الحالة التي تكون فيها نهاية المتتابعة تساوي الصفر لانستطيع أن نحدد تقارب أوتباعد مجموعها أي يفشل اختبار التباعد فنلجأ إلى متتابعة المجاميع الجزئية ، وهي الحالة الأخيرة من دراسة المتسلسلات غير المنتهية .

الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

رابعاً : متتابعة المجاميع الجزئية :

إذا كانت المتسلسلة ليست حسابية ولا هندسية ولم ينطبق عليها اختبار التباعد ففي هذه الحالة نستخدم متتابعة المجاميع الجزئية وهي حالة عامة عن طريقها نستطيع أن ندرس جميع المتسلسلات .

تعريف :

المتتابعة غير المنتهية $\{ ج_ن \}$ حيث : $ج_ن = \sum_{ن=1}^{\infty} ء_ن$ تسمى متتابعة المجاميع الجزئية حيث :

$ج_1 = ء_1$ ، $ج_2 = ء_1 + ء_2$ ، $ج_3 = ء_1 + ء_2 + ء_3$ ، $ج_4 = ء_1 + ء_2 + ء_3 + ء_4$ ،

.... ، $ج_ن = ء_1 + ء_2 + ء_3 + ء_4 + ... + ء_ن$

أي أن :

$ج_ن$: هي مجموع الحدود الأولى من ج والتي عددها ن ويسمى بالمجموع الجزئي للمتسلسلة ج .

وهناك طريقتان لدراستها كالتالي :

(١) نوجد المجاميع الجزئية ونرى سير المتتابعة ثم نحدد هل هي تقاربية أم تباعدية .

(٢) نستنتج الحد العام وندرس نهاية المتتابعة فإذا كانت :

- إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية $\{ ج_ن \}$ متقاربة ونهايتها = ل ، فإن المتسلسلة : $ج = \sum_{ن=1}^{\infty} ء_ن$ ، تقاربية ومجموعها العدد الحقيقي ل .
- إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية $\{ ج_ن \}$ تباعدية وليس لها نهاية ، فإن المتسلسلة : $ج = \sum_{ن=1}^{\infty} ء_ن$ ، تباعدية ولا يمكن إيجاد مجموعها .

الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

مثال :

ادرس تقارب المتسلسلة $ج = \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{1}{ن}$.

الحل :

واضح : $\lim_{ر \to \infty} \frac{1}{ر} =$ صـــفراً (∴ لا ينطبق عليها اختبار التباعد) .

بينما نجد أن : $ج_1 = 1$

$ج_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$ج_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

∴ $ح_ر = \left(1 ، \frac{3}{2} ، \frac{11}{6} ، .... \right)$

وهكذا كلما زادت قيمة ن تزداد $ج_ن$ وبالتالي المتتابعة $\{ ج_ن \}$ متباعدة .

⇐ المتسلسلة ج متباعدة ، وليس لها مجموع .

الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

مثال :

أثبت أن المتسلسلة : $ح = \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{1}{ن(ن+1)}$ متقاربة وأوجد مجموعها .

الحل :

اعلم أن : $\frac{1}{ن(ن+1)} = \frac{1}{ن} - \frac{1}{(ن+1)}$

$ج_1 = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2})$ ، $ج_2 = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$ ،

$ج_3 = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$

$ج_ن = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots\ldots + (\frac{1}{ن} - \frac{1}{ن+1})$

$ح_ن = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{ن} - \frac{1}{ن+1}\right)$

$\therefore ح_ن = \left(1 - \frac{1}{ن+1}\right)$

$\lim_{ن \to \infty} ح_ن = \lim_{ن \to \infty} \left(1 - \frac{1}{ن+1}\right) = 1$

$\therefore$ المتتابعة تقاربيه $\Leftarrow$ المتسلسلة تقاربيه ومجموعها = ١ .

تطبيقات متنوعة على الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

١ أوجد الحد الأول للمتسلسلة الهندسية اللانهائية التي أساسها : $-\frac{١}{٣}$ ، ومجموع حدودها يساوي : $٦\frac{٣}{٤}$.

٢ أوجد كلاً مما يلي :

أ $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{٣^{ن}}{٤^{ن-١}}\right)$

ب $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{٢^{ن-١}}{٥^{ن+١}}\right)$

٣ سقطت كرة مطاطية من ارتفاع مترين ، وكانت ترتد دائماً إلى $\frac{١}{٢}$ الارتفاع الذي سقطت منه ، أوجد مجموع المسافات التي قطعتها الكرة قبل سكونها .

٤ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨سم ، تم التوصيل بين منتصفات أضلاعه بقطع مستقيمة لتشكيل مثلث آخر متساوي الأضلاع ، فإذا استمر هذا النمط مع المثلثات المركزية إلى مالانهاية فجد مجموع مساحات المثلثات الناتجة .

حل : تطبيقات متنوعة على الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

٤ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨سم ، تم التوصيل بين منتصفات أضلاعه بقطع مستقيمة لتشكيل مثلث آخر متساوي الأضلاع ، فإذا استمر هذا النمط مع المثلثات المركزية إلى مالانهاية فجد مجموع مساحات المثلثات الناتجة .

الحل :

نعلم أن مساحة المثلث المتطابق الأضلاع = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}ل^{٢}$ ، حيث : ل طول الضلع .

المثلث الأول طول ضلعه = ٨ ⇐ مساحته = $\frac{\sqrt{٣}}{٤} \times (٨)^{٢} = ١٦\sqrt{٣}$

بعد التنصيف سيكون طول ضلع المثلث الثاني = ٤ ⇐ مساحته = $\frac{\sqrt{٣}}{٤} \times (٤)^{٢} = ٤\sqrt{٣}$

بعد التنصيف سيكون طول ضلع المثلث الثاني = ٤ ⇐ مساحته = $\frac{\sqrt{٣}}{٤} \times (٢)^{٢} = \sqrt{٣}$

∴ مجموع مساحة المثلثات تكون متسلسلة حدودها : $\left(١٦\sqrt{٣} + ٤\sqrt{٣} + \sqrt{٣} + \ldots\ldots \right)$

وسنلاحظ أن المتسلسلة هندسية وأساسها = $\frac{١}{٤}$

∴ مجموعها : $ح = \frac{١٦\sqrt{٣}}{١ - \frac{١}{٤}} = \frac{١٦\sqrt{٣}}{\frac{٣}{٤}} = \frac{٦٤}{٣}\sqrt{٣}$

حل : تطبيقات متنوعة على الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

مثال :

طول ضلع مربع ٨ ســــــم ، فإذا كان المربع الثاني رؤوسه هي منتصفات أضلاع المربع الأول ، واستمرت هذه العملية كما هو موضح في الشكل .

١ اكتب أطوال أضلاع أول أربعة مربعات ؟

٢ اكتب الفقرة الأولى على صورة متتابعة ؟

٣ أوجد مجموع أطوال أضلاع المربعات الأربعة ؟

٤ استنتج صيغة بدلالة الحد الأول وعدد الحدود لمجموع أطوال أضلاع أول ن مربعات ؟

الحل :

١ أطوال المربعات الأربعة الأولى بالتتابع هي : (٨ ، ٤ ، ٢ ، ١)

٢ الفقرة الأولى على صورة متتابعة : (٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، .....)

٣ مجموع أطوال أضلاع المربعات الأربعة = ١٥ .

٤ صيغة بدلالة الحد الأول وعدد الحدود لمجموع أطوال أضلاع أول ن مربعات :

واضح أن المتتابعة هندسية حدها الأول = ٨ ، وأساسها = $\frac{١}{٢}$.

ومجموع ن حداً منها هو : $-١٦ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن} + ١٦$